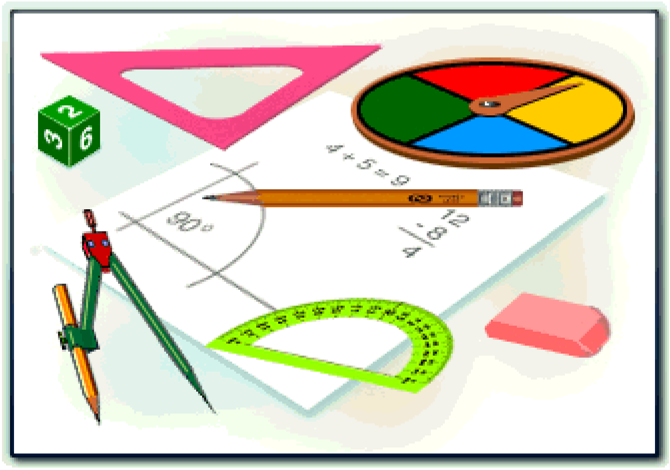


MATHEMATIQUES

CAHIER DE REVISIONS ETE 2018

ENTREE EN TERMINALE S

CORRECTIONS

Exercice 1 :

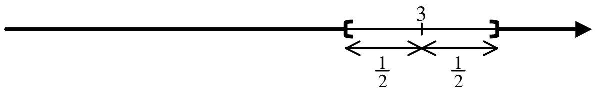
a) $S=\varnothing$ (une valeur absolue est toujours positive)

b) $S=[-15\,;15\,]$ ($|x|$ est la distance entre l'origine d'un axe et le point M d'abscisse x)

c) $x-6$ est égal à -2 ou à 2 donc $S=\{\,8\,;4\,\}$

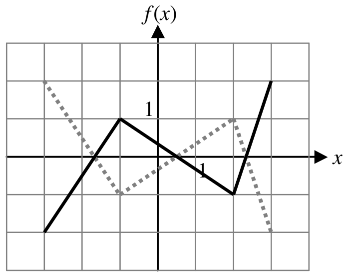
d) $3x+9$ est égal à -5 ou à 5 (ou $|3x+9|=3|x+3|$ donc $x+3$ est égal à $-\frac{5}{3}$ ou à $\frac{5}{3}$) donc $S=\{\,\frac{14}{3}\,;\frac{4}{3}\,\}$

e) $S=\,]-\infty\,;\frac{5}{2}\,[\,\cup\,]\,\frac{7}{2}\,;+\infty\,[$

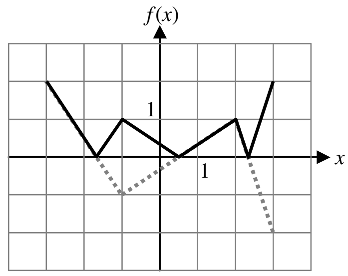


Exercice 2 :

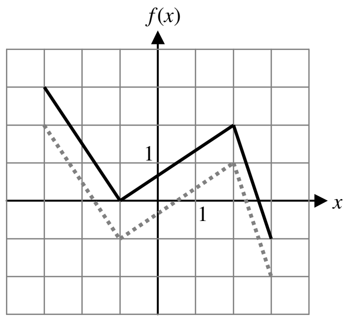
f_1 est définie sur $[-3\,;3\,]$:



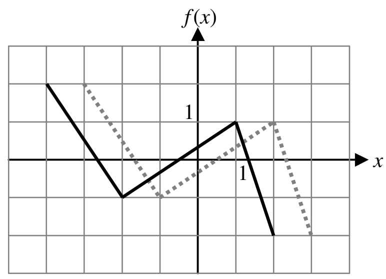
f_2 est définie sur $[-3\,;3\,]$:



f_3 est définie sur $[-3\,;3\,]$:



f_4 est définie sur $[-4\,;2\,]$ (car $x+1\in[-3\,;3\,] \Leftrightarrow -3\le x+1\le 3$
$\Leftrightarrow -4\le x\le 2$)



Exercice 3 :

0) La calculatrice donne le même résultat (0,9999998) pour A et B mais c'est louche.

1) a) $D_f=\mathbf{R}\setminus\{-\frac{1}{4}\}$ et $D_g=\mathbf{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}$

b) $f(10^{-7})=A$ et $g(10^{-7})=B$

2) a) $\varphi(x)=\dfrac{1+2x}{1+4x}-\dfrac{1-4x}{1-2x}=\dfrac{(1+2x)(1-2x)-(1-4x)(1+4x)}{(1+4x)(1-2x)}=\dfrac{(1-4x^2)-(1-16x^2)}{(1+4x)(1-2x)}=\dfrac{-4x^2+16x^2}{(1+4x)(1-2x)}$

d'où le résultat.

b) $\varphi(x)$ a le signe de son dénominateur :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$1+4x$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S=\,]-\frac{1}{4}\,;\frac{1}{2}\,[$

c) $10^{-7}\in S$ donc $\varphi(10^{-7})>0$, c'est-à-dire $A-B>0 \Leftrightarrow A>B$

Exercice 4 :

1) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=a+2\sqrt{ab}+b$

2) a) la fonction "racine carrée est positive sur $\mathbf{R}^+$ donc $2\sqrt{ab}\ge 0$ et donc $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2\ge a+b$

et la fonction "racine carrée" est croissante sur $\mathbf{R}^+$ donc $\left|\sqrt{a}+\sqrt{b}\right|\ge a+b$ d'où le résultat

b) $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b} \Leftrightarrow \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=\left(\sqrt{a+b}\right)^2$ (il s'agit de nombres positifs)

$\Leftrightarrow a+2\sqrt{ab}+b=a+b \Leftrightarrow 2\sqrt{ab}=0 \Leftrightarrow ab=0$ d'où le résultat (règle des signes)

Exercice 5 :

$(2x+1)(5-x)<(x-5)(x+4) \;\Leftrightarrow\; (2x+1)(5-x)+(5-x)(x+4)<0 \;\Leftrightarrow\; (5-x)(3x+5)<0$

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		5		$+\infty$
$5-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$3x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$(5-x)(3x+5)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

donc $S=\left]-\infty\,;-\frac{5}{3}\right[\cup\left]5\,;+\infty\right[$

Exercice 6 :

En posant $X=x^2$: $6x^4-5x^2+1=0 \Leftrightarrow 6X^2-5X+1=0$; $\Delta=1>0$ d'où deux racines réelles $X_1=\frac{1}{3}$ et $X_2=\frac{1}{2}$

donc $x^2=\frac{1}{3} \Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, ou $x^2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, et finalement $S=\left\{-\frac{\sqrt{3}}{3}\,;-\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

Exercice 7 :

a) $\Delta=9>0$ d'où deux racines réelles $x_1=1$ et $x_2=\frac{5}{2}$, et :

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$-2x^2+7x-5$		$-$	0	$+$	0	$-$	

donc $S=\left]-\infty\,;1\right]\cup\left[\frac{5}{2}\,;+\infty\right[$

b) Pour le numérateur $\Delta=-11<0$ donc il n'y a pas de racine réelle et le numérateur est toujours positif ;
pour le dénominateur : $\Delta=49>0$ d'où deux racines réelles $x_1=-2$ et $x_2=5$, et :

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$x^2-3x-10$		$+$	0	$-$	0	$+$	

donc $S=\left]-\infty\,;-2\right[\cup\left]5\,;+\infty\right[$

c) $\dfrac{x^2-5x+4}{x^4-4}\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-5x+4}{(x^2-2)(x^2+2)}\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-5x+4}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+2)}\le 0$

pour le numérateur : $\Delta=9>0$ d'où deux racines réelles $x_1=1$ et $x_2=4$; de plus $x^2+2>0$ pour tout $x\in\mathbf{R}$:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		1		$\sqrt{2}$		4		$+\infty$
x^2-5x+4		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x-\sqrt{2}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+\sqrt{2}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{x^2-5x+4}{x^4-4}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

donc $S=\left]-\sqrt{2}\,;1\right]\cup\left]\sqrt{2}\,;4\right]$

Exercice 8 :

a) $\dfrac{2x-5}{x-1}=\dfrac{x-1}{x+1} \Leftrightarrow \dfrac{(2x-5)(x+1)-(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-x-6}{(x-1)(x+1)}=0 \Leftrightarrow x^2-x-6=0$ et $x\notin\{-1\,;1\}$

or $\Delta=25>0$ d'où deux racines réelles $x_1=-2$ et $x_2=3$: $S=\{-2\,;3\}$

b) $\dfrac{x^2-x+1}{x+2}=2x+3 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-x+1-(2x+3)(x+2)}{x+2}=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+8x+5}{x+2}=0 \Leftrightarrow x^2+8x+5=0$ et $x\neq-2$

or $\Delta=44>0$ d'où deux racines réelles $x_1=\dfrac{-8-\sqrt{44}}{2}$ et $x_2=\dfrac{-8+\sqrt{44}}{2}$: $S=\{-4-\sqrt{11}\,;-4+\sqrt{11}\}$

Exercice 9 :

$(x^2+2x-4)^2<9 \;\Leftrightarrow\; (x^2+2x-4)^2-3^2<0 \;\Leftrightarrow\; (x^2+2x-7)(x^2+2x-1)<0$

pour le premier facteur $\Delta=32>0$ d'où deux racines réelles $x_1=\dfrac{-2-\sqrt{32}}{2}=-1-2\sqrt{2}$ et $x_2=-1+2\sqrt{2}$

pour le second facteur $\Delta = 8 > 0$ d'où deux racines réelles $x'_1 = \dfrac{-2-\sqrt{8}}{2} = -1-\sqrt{2}$ et $x'_2 = -1+\sqrt{2}$

x	$-\infty$		$-1-2\sqrt{2}$		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		$-1+2\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2+2x-7		+	0	−		−		−	0	+	
x^2+2x-1		+		+	0	−	0	+		+	
$(x^2+2x-7)(x^2+2x-1)$		+	0	−	0	+	0	−	0	+	

donc $S =]-1-2\sqrt{2}\,;-1-\sqrt{2}\,[\, \cup \,]-1+\sqrt{2}\,;-1+2\sqrt{2}\,[$

Exercice 10 :

1) $f(x) = x^2-4x-5 = (x-2)^2-4-5 = (x-2)^2-9$ et $g(x) = -2x^2+4x-2 = -2(x^2-2x+1) = -2(x-1)^2$

2)

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f	↘	-9	↗

x	$-\infty$	1	$+\infty$
g	↗	0	↘

3) a) $\varphi(x) = 3x^2-8x-3 = 3[x^2-\frac{8}{3}x-1] = 3[(x-\frac{4}{3})^2-\frac{16}{9}-1] = 3(x-\frac{4}{3})^2-\frac{25}{3}$

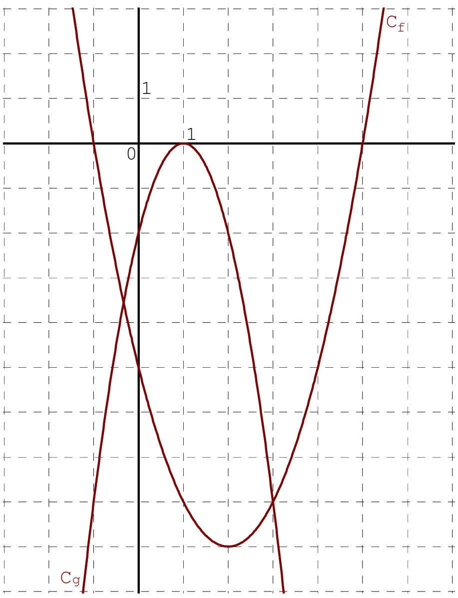
b) $\varphi(x) = 3[(x-\frac{4}{3})^2-\frac{25}{9}] = 3(x-\frac{4}{3}-\frac{5}{3})(x-\frac{4}{3}+\frac{5}{3}) = 3(x-3)(x+\frac{1}{3}) = (x-3)(3x+1)$

c) Les abscisses des points d'intersection de C_f et C_g sont les solutions de l'équation
$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x-3 = 0$ ou $3x+1 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -\frac{1}{3}$
or $f(3) = -8$ et $f(-\frac{1}{3}) = -\frac{32}{9}$ donc les points cherchés sont $A(3\,;-8)$ et $B(-\frac{1}{3}\,;-\frac{32}{9})$

d)

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$\varphi(x) = f(x)-g(x)$		+	0	−	0	+	
position relative de C_f et C_g.		C_f est au-dessus de C_g		C_f est en dessous de C_g		C_f est au-dessus de C_g	

4)



Exercice 11 :

1) Notons $n-1$, n et $n+1$ les trois entiers consécutifs cherchés : on doit avoir
$(n-1)^2+n^2+(n+1)^2 = 15\,125 \Leftrightarrow 3n^2+2 = 15\,125 \Leftrightarrow n^2 = 5\,041 \Leftrightarrow n = -71$ ou $n = 71$
une longueur étant positive, $n = 71$ et les trois entiers cherchés sont 70, 71 et 72

2) On doit avoir maintenant $(n-1)^2+n^2+(n+1)^2 = 15\,127 \Leftrightarrow n^2 = \frac{15125}{3}$, ce qui n'est pas possible avec n entier

Exercice 12 :

Notons p le prix payé par litre, et Q la quantité d'essence achetée : $pQ=77$ et $(p-0{,}14)(Q+5)=77$

donc $Q=\dfrac{77}{p}$ et donc $(p-0{,}14)\left(\dfrac{77}{p}+5\right)=77 \Leftrightarrow 77+5p-\dfrac{10{,}78}{p}-0{,}7=77 \Leftrightarrow 5p^2-0{,}7p-10{,}78=0$

$\Delta=216{,}09>0$ d'où deux racines réelles $p_1=\dfrac{0{,}7-14{,}7}{10}=-1{,}4$ et $p_2=\dfrac{0{,}7+14{,}7}{10}=1{,}54$

le prix ne pouvant (hélas) être négatif : $p=1{,}54$ €/L et donc $Q=\frac{77}{1{,}54}=50\,\text{L}$

Exercice 13 :

1) $p=\frac{1}{2}gt_1^2$

2) $p=ct_2$

3) $ct_2=\frac{1}{2}gt_1^2 \Leftrightarrow t_2=\dfrac{gt_1^2}{2c} \Leftrightarrow t_2=\dfrac{t_1^2}{64}$

4) $t_1+t_2=4{,}5 \Leftrightarrow t_1+\dfrac{t_1^2}{64}=4{,}5 \Leftrightarrow t_1^2+64t_1-4{,}5\times 64=0$

5) $\Delta=5\,248>0$ d'où deux racines réelles $t'_1\approx\dfrac{-64-72{,}443}{2}<0$ et $t_1\approx\dfrac{-64+72{,}443}{2}=4{,}2215$

(une durée est positive) donc $p\approx\frac{1}{2}\times 10\times 4{,}2215^2\approx 89{,}1\,\text{m}$

Exercice 14 :

1) $P(\frac{\sqrt{6}}{4})=4\times\frac{6}{16}-\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{6}}{4}-4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{6}}{4}+\sqrt{18}=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}-\sqrt{18}+\sqrt{18}=0$

2) Le produit des racines est $\frac{\sqrt{18}}{4}=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{6}}{4}$ donc l'autre racine est $\sqrt{3}$.

Exercice 15 :

$\Delta=b^2+4a^2>0$ (un carré est toujours positif) donc (E) possède deux solutions réelles, dont le produit est $\dfrac{-a}{a}=-1$ donc elles sont de signes contraires d'après la règle des signes

Exercice 16 :

$A(3\,;0)\in P$ donc $0=a\times 3^2+b\times 3+c \Leftrightarrow 9a+3b+c=0$ et $B(0\,;2)\in P$ donc $2=a\times 0^2+b\times 0+c \Leftrightarrow c=2$

le sommet de P a pour abscisse $1=-\dfrac{b}{2a} \Leftrightarrow b=-2a$ d'où $9a-6a+2=0 \Leftrightarrow a=-\frac{2}{3}$ puis $b=\frac{4}{3}$ (et $c=2$)

Exercice 17 :

1) $(x+3)(ax^2+bx+c)=ax^3+(3a+b)x^2+(3b+c)x+3c$ donc par identification avec les coefficients de $f(x)$:

$\begin{cases}a=-1\\3a+b=-4\\3b+c=27\\3c=90\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-1\\b=-1\\c=30\end{cases}$ et donc $f(x)=(x+3)(-x^2-x+30)$ pour tout réel x

2) $f(x)=0 \Leftrightarrow x+3=0$ ou $-x^2-x+30=0$; pour ce trinôme $\Delta=121>0$ d'où deux racines réelles $x_1=5$ et $x_2=-6$, d'où $S=\{-6\,;-3\,;5\}$ et :

x	$-\infty$		-6		-3		5		$+\infty$
$x+3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x^2-x+30$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice 18 :

$\begin{cases} x+y=S \\ xy=P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=S-x \\ x(S-x)=P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=S-x \\ x^2-Sx+P=0 \end{cases}$ et de manière analogue $\begin{cases} x+y=S \\ xy=P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=S-y \\ y^2-Sy+P=0 \end{cases}$

donc les couples de solutions du système sont constitués des racines du trinôme T^2-ST+P

a) Les solutions sont les couples de racines du trinôme $T^2-2T-35$: $\Delta=144>0$ d'où deux racines réelles $T_1=-5$ et $T_2=7$, d'où $S=\{\,(-5\,;7\,)\,;(\,7\,;-5\,)\,\}$

b) $\begin{cases} x+y=1 \\ 4xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ xy=\frac{1}{4} \end{cases}$: x et y sont les racines du trinôme $T^2-T+\frac{1}{4}=(T-\frac{1}{2})^2$ donc $S=\{\,(\,\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,)\,\}$

c) $\begin{cases} x^2+y^2=35 \\ xy=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=35 \\ x^2y^2=196 \end{cases}$: x^2 et y^2 sont racines du trinôme $T^2-35T+196$: $\Delta=441>0$ d'où deux racines réelles $T_1=7$ et $T_2=28$, et $S=\{\,(\sqrt{7}\,;2\sqrt{7}\,)\,;(\,2\sqrt{7}\,;\sqrt{7}\,)\,;(-\sqrt{7}\,;-2\sqrt{7}\,)\,;(-2\sqrt{7}\,;-\sqrt{7}\,)\,\}$

Exercice 19 :

1) $f(3)=9$; $f'(3)=0$; $f(6)=2$; $f'(6)=0$

2) La tangente à C_f en son point d'abscisse 4 "descend" donc $f'(4)<0$

Exercice 20 :

1) f est dérivable sur **R** (polynôme) et $f'(x)=3\times 4x^3-2\times 3x^2+5\times 1-0=12x^3-6x^2+5$ pour tout réel x

g est dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ (produit de la fonction "racine carrée" par la différence entre une constante et la fonction "inverse", toutes dérivables sur $]\,0\,;+\infty\,[$) et

$$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right)+\sqrt{x}\times\frac{1}{x^2}=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}=\frac{x+1}{2x\sqrt{x}} \text{ pour tout } x>0$$

h est dérivable sur **R** (fonction rationnelle dont le dénominateur est strictement positif) et

$$h'(x)=\frac{1\times(x^2+1)-(x+5)\times 2x}{x^2+1}=\frac{-x^2-10x+1}{x^2+1} \text{ pour tout réel } x$$

2) f est dérivable sur **R** (polynôme) $f'(x)=4x(3x^3-7)+(2x^2+3)\times 9x^2=30x^4+27x^2-28x$ pour tout réel x

g est dérivable sur $]-\infty\,;\frac{1}{3}\,[$ et sur $]\,\frac{1}{3}\,;+\infty\,[$ (fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas) et

$g=u^2$ donc $g'=2uu'$ c'est-à-dire $g'(x)=2\times\dfrac{2x+4}{3x-1}\times\dfrac{2(3x-1)-(2x+4)\times 3}{(3x-1)^2}=\dfrac{-56(x+2)}{(3x-1)^3}$ pour tout $x\neq\frac{1}{3}$

h est dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ (quotient de la fonction "identité", dérivable sur **R**, par sa somme avec la fonction "racine carrée", dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$, cette somme ne s'annulant pas sur $]\,0\,;+\infty\,[$) et

$$h'(x)=\frac{1\times(x+\sqrt{x})-x\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(x+\sqrt{x})^2}=\frac{\sqrt{x}}{2(x+\sqrt{x})^2} \text{ pour tout } x>0$$

Exercice 21 :

1) f est dérivable sur $]-\infty\,;1\,[$ et sur $]\,1\,;+\infty\,[$ (fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas) et

$$f'(x)=\frac{2(x-1)-(2x+3)}{(x-1)^2}=\frac{-5}{(x-1)^2} \text{ pour tout } x\neq 1$$

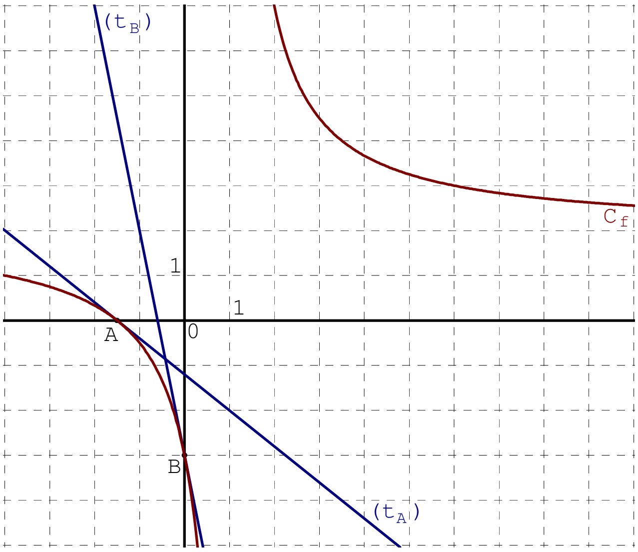
2) L'abscisse de A est solution de $f(x)=0 \Leftrightarrow 2x+3=0$ et $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$, donc $A(-\frac{3}{2}\,;0\,)$

(t_A) a pour équation $y=f'(-\frac{3}{2})[x-(-\frac{3}{2})]+f(-\frac{3}{2})$ et $f'(-\frac{3}{2})=-\frac{4}{5}$ d'où (t_A) : $y=-\frac{4}{5}x-\frac{6}{5}$

3) B a pour ordonnée $f(0)=-3$ donc $B(0\,;-3)$

(t_B) a pour équation $y=f'(0)[x-0]+f(0)$ et $f'(0)=-5$ d'où (t_B) : $y=-5x-3$

4)



5) (AB) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées et a pour coefficient directeur $\dfrac{-3-0}{0-(-\frac{3}{2})}=-2$

la tangente au point d'abscisse x lui est parallèle si et seulement si $f'(x)=-2 \Leftrightarrow (x-1)^2=\frac{5}{2}$ et $x\neq 1$

$\Leftrightarrow x=1-\sqrt{\frac{5}{2}}$ ou $x=1-\sqrt{\frac{5}{2}}$

Exercice 22 :

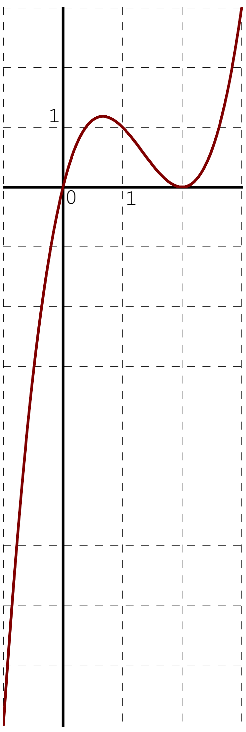
1) a) f est dérivable sur **R** (polynôme) et $f'(x)=3x^2-8x+4$ pour tout réel x

Le discriminant de f' est $\Delta=16>0$ d'où deux racines réelles $x_1=\frac{2}{3}$ et $x_2=2$, et :

b)

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$\frac{32}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

2)



3) Les abscisses des points d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses sont les solutions de

$f(x)=0 \Leftrightarrow x(x^2-4x+4)=0 \Leftrightarrow x(x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=2$

d'où $O(0\,;0)$ et $A(2\,;0)$

Exercice 23 :

1) a) f est dérivable sur **R** (polynôme) et $f'(x)=2x-3$ pour tout réel x :

b)

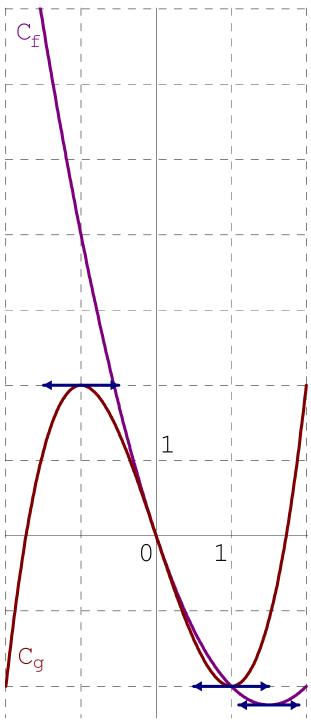
x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘	$-\frac{9}{4}$	↗	

2) a) g est dérivable sur **R** (polynôme) et $g'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$ pour tout réel x :

b)

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗	2	↘	-2	↗	

3) a)



b) Les courbes semblent se couper en deux points : $O(0;0)$ et $A(1;-2)$

c) $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2=x^3 \Leftrightarrow 0=x^2(x-1)$ d'où $S=\{0;1\}$
de plus $g(0)=g(1)=-2$

Exercice 24 :

1) a) f est dérivable sur **R** (polynôme) et
$f'(x)=3x^2-60x+225$ pour tout réel x

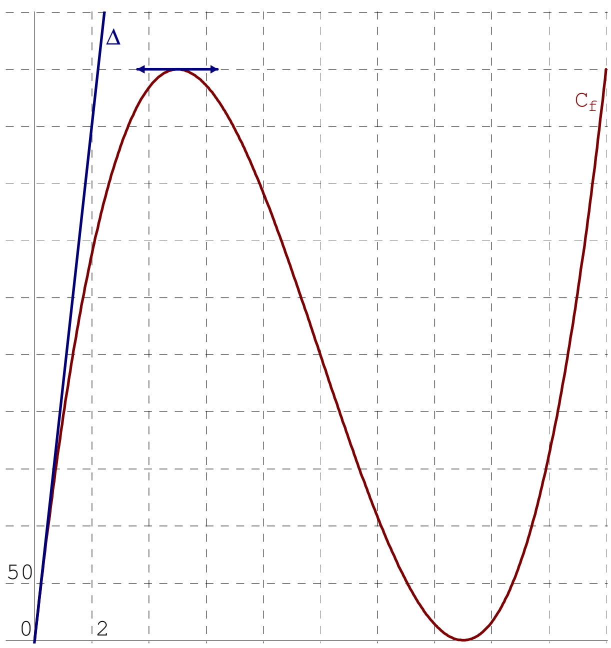
Le discriminant de f' est $\Delta=900>0$ d'où deux racines réelles $x_1=15$ et $x_2=5$, et :

x	$-\infty$		5		15		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗	500	↘	0	↗	

b) Δ a pour équation $y=f'(0)(x-0)+f(0) \Leftrightarrow y=225x$
car $f'(0)=225$ et $f(0)=0$

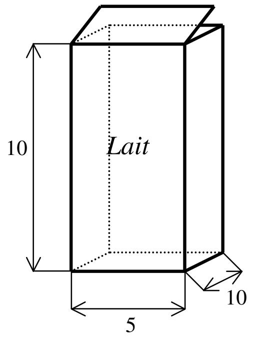
c) $f(x)=0 \Leftrightarrow x(x^2-30x+225)=0 \Leftrightarrow x(x-15)^2=0$

d)



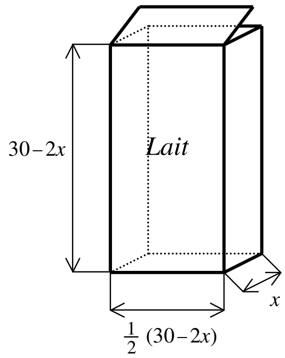
2) a) $x \in [0;15]$

b)



$V=5\times 10\times 10=500\text{ cm}^3$

c)



$V=\frac{1}{2}(30-2x)x(30-2x)$
$=2x^3-60x^2+450x=2f(x)$

d) $\frac{1}{2}(30-2x)=x \Leftrightarrow x=\frac{15}{2}=7{,}5\text{ cm}$

e) V est maximal lorsque $f(x)$ l'est, c'est-à-dire pour $x=5$ cm

(alors $V=1$ L)

Exercice 25 :

1) a) $v=\dfrac{150}{t} \Leftrightarrow t=\dfrac{150}{v}$

b) Le prix de revient pour une heure de trajet se compose de $\left(6+\dfrac{v^2}{300}\right)\times 0{,}9$ € (pour le carburant) et 12 € (pour le chauffeur) donc $P(v)=\left[\left(6+\dfrac{v^2}{300}\right)\times 0{,}9+12\right]\times t=(17{,}4+0{,}003v^2)\times\dfrac{150}{v}=\dfrac{2610}{v}+0{,}45v$

2) P est dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ (somme du produit d'une constante par la fonction "inverse" et d'une fonction linéaire) et $P'(v)=-\dfrac{2610}{v^2}+0{,}45=\dfrac{0{,}45v^2-2610}{v^2}=\dfrac{0{,}45(v-10\sqrt{58})(v+10\sqrt{58})}{v^2}$ qui est du signe de $v-10\sqrt{58}$ pour tout $v>0$, d'où :

v	0		$10\sqrt{58}$		$+\infty$
$P'(v)$		$-$	0	$+$	
P		$\searrow$	$9\sqrt{58}$	$\nearrow$	

le prix de revient est minimal lorsque $v=10\sqrt{58}\approx 76$ km/h

Exercice 26 :

$\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{1}{1+|x|}\xrightarrow[x\to 0]{}1$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=1$

La tangente à C_f en son point d'abscisse 0 a pour équation $y=f'(0)(x-0)+f(0) \Leftrightarrow y=x$ car $f(0)=0$

Exercice 27 :

P est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$, dérivable sur $\mathbf{R}$ (polynôme) avec $f'(x)=2ax+b$ pour tout réel x.
$A(3\,;0)\in P$ donc $0=a\times 3^2+b\times 3+c \Leftrightarrow 9a+3b+c=0$
B a pour abscisse 0 et est surla droite d'équation $y=2x+2$ donc son ordonnée est $y_B=2\times 0+2=2$
donc $B(0\,;2)\in P$ d'où $2=a\times 0^2+b\times 0+c \Leftrightarrow c=2$
le coefficient directeur de la tangente à P en B est 2, c'est-à-dire $f'(0)=2 \Leftrightarrow 2a\times 0+b=2 \Leftrightarrow b=2$
alors $9a+3\times 2+2=0 \Leftrightarrow a=-\frac{8}{9}$

Exercice 28 :

1) Le dernier facteur a pour discriminant $\Delta=-92<0$ et est donc toujours strictement positif, d'où :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$+$	

2) a) f est dérivable sur **R** (fonction rationnelle dont le dénominateur est strictement positif sur **R**) et

$$f'(x) = \frac{(3x^2+2x+12)(x^2+12)-(x^3+x^2+12x+76)\times 2x}{(x^2+12)^2} = \frac{2x^4+24x^2-128x+144}{(x^2+12)^2} \text{ pour tout réel } x$$

or $P(x) = (x^2-4x+4)(x^2+4x+36) = x^4+24x^2-128x+144$ pour tout réel x

b) $f'(x)$ a un dénominateur strictement positif et est donc du signe de $P(x)$:

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$\nearrow$	

Exercice 29 :

$f(1)=7 \Leftrightarrow a+b+c=7$ et $f(2)=6 \Leftrightarrow 2a+b+\frac{c}{2}=6$

f est dérivable sur [1 ; 5] (fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas) et

$f'(x) = a - \frac{c}{x^2}$ pour tout $x \in [\,1\,;5\,]$; or f possède un extrema en 2 donc $f'(2)=0 \Leftrightarrow a-\frac{c}{4}=0 \Leftrightarrow c=4a$

ainsi $\begin{cases} 5a+b=7 \\ 4a+b=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$ et donc $c=4$

Exercice 30 :

$u_{100} = u_0 + 100r$ donc $u_0 = 650 - 100\times 8 = -150$

Exercice 31 :

1) $u_n = 5 + n\times(-2)$ pour tout entier naturel n : c'est la définition explicite de la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r=-2$

2) $S = 5-2\times 0+5-2\times 1+5-2\times 2+...+5-2\times 99+5-2\times 100 = 5\times 101-2\times(0+1+2+...+99+100)$
$= 505 - 2\times\frac{100\times(100+1)}{2} = -9\,595$

Exercice 32 :

1) $u_0 = 0^4-6\times 0^3+11\times 0^2-5\times 0 = 0$ $\qquad u_2 = 2^4-6\times 2^3+11\times 2^2-5\times 2 = 2$
$u_1 = 1^4-6\times 1^3+11\times 1^2-5\times 1 = 1$ $\qquad u_3 = 3^4-6\times 3^3+11\times 3^2-5\times 3 = 3$

2) (u_n) semble arithmétique de raison 1 mais $u_4 = 4^4-6\times 4^3+11\times 4^2-5\times 4 = 28 \neq 4$ donc ce n'est pas le cas

Exercice 33 :

1) $u_{100} = u_{50} + (100-50)r$ donc $r = \frac{u_{100}-u_{50}}{50} = \frac{806-406}{50} = 8$ $\qquad u_{50} = u_0 + 50r$ donc $u_0 = 406 - 50\times 8 = 6$

2) $S = 6+50\times 8+6+51\times 8+6+52\times 8+...+6+99\times 8+6+100\times 8 = 6\times 51+8\times(50+51+52+...+99+100)$
$= 306+8\times[(1+2+...+100)-(1+2+...+49)] = 306+8\times\left(\frac{100\times(100+1)}{2}-\frac{49\times(49+1)}{2}\right) = 30\,906$

Exercice 34 :

1) $u_2 = qu_1 = -2\times 1 = -2$ $\qquad u_3 = qu_2 = -2\times(-2) = 4$ $\qquad u_4 = qu_3 = -2\times 4 = -8$

2) $u_{20} = u_1\times q^{20-1} = (-2)^{19} = -524\,288$

3) $S = 1+q+q^2+...+q^{20} = \frac{1-q^{20+1}}{1-q} = \frac{1-(-2)^{21}}{1+2} = 699\,051$

Exercice 35 :

En notant q la raison de la suite, il faut que $x = 25q$ et $16 = qx$ donc que $16 = 25q^2 \Leftrightarrow q^2 = \frac{16}{25}$
or $q < 0$ donc $q = -\frac{4}{5}$ et donc $x = 25\times(-\frac{4}{5}) = -20$

Exercice 36 :

$$S_1 = 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + ... + 3^{10} = \frac{1-3^{10+1}}{1-3} = 88\,573$$

S_2 est une somme de termes consécutifs de la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 3, dans laquelle 1000 est le terme d'indice k avec $1000 = 1 + 3k \Leftrightarrow k = 333$

$$S_2 = (1+0\times3)+(1+1\times3)+(1+2\times3)+(1+3\times3)+...+(1+333\times3) = 334\times1+3\times(0+1+2+3+...+333)$$

$$= 334 + 3\times\frac{333\times(333+1)}{2} = 167\,167$$

Exercice 37 :

1) $u_1 = \frac{2}{1+u_0} = \frac{2}{1+3} = \frac{1}{2}$ $\qquad u_2 = \frac{2}{1+u_1} = \frac{2}{1+\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$

$u_2 - u_1 = \frac{5}{6} \neq -\frac{5}{2} = u_1 - u_0$ donc (u_n) n'est pas arithmétique

$\frac{u_2}{u_1} = \frac{8}{3} \neq \frac{1}{6} = \frac{u_1}{u_0}$ donc (u_n) n'est pas géométrique

2) a) $v_0 = \frac{u_0-1}{u_0+2} = \frac{3-1}{3+2} = \frac{2}{5}$ $\qquad v_1 = \frac{u_1-1}{u_1+2} = \frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}+2} = -\frac{1}{5}$ $\qquad v_2 = \frac{u_2-1}{u_2+2} = \frac{\frac{4}{3}-1}{\frac{4}{3}+2} = \frac{1}{10}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2}}{\frac{u_n-1}{u_n+2}} = \frac{\frac{2}{1+u_n}-1}{\frac{2}{1+u_n}+2}\times\frac{u_n+2}{u_n-1} = \frac{\frac{2-(1+u_n)}{1+u_n}}{\frac{2+2(1+u_n)}{1+u_n}}\times\frac{u_n+2}{u_n-1} = \frac{1-u_n}{2(2+u_n)}\times\frac{u_n+2}{u_n-1} = -\frac{1}{2} \text{ pour tout } n\in\mathbf{N}$$

donc (v_n) est géométrique, de raison $-\frac{1}{2}$

b) $v_n = v_0 q^n = \frac{2}{5}\times(-\frac{1}{2})^n = \frac{1}{5\times(-2)^{n-1}}$ pour tout $n\in\mathbf{N}$

c) $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2} \Leftrightarrow v_n u_n + 2v_n = u_n - 1 \Leftrightarrow (v_n-1)u_n = -1-2v_n \Leftrightarrow u_n = \frac{1+2v_n}{1-v_n}$

c'est-à-dire $u_n = \frac{1+\frac{2}{5\times(-2)^{n-1}}}{1+\frac{1}{5\times(-2)^{n-1}}} = \frac{5\times(-2)^{n-1}-2}{5\times(-2)^{n-1}+1}$ pour tout $n\in\mathbf{N}$

Exercice 38 :

Notons A_n (resp. B_n) le montant du loyer pour le n-ème mois avec le contrat A (resp. avec le contrat B)

1) $A_1 = 200$ $\qquad A_2 = A_1 + 5 = 205$ $\qquad A_3 = A_2 + 5 = 210$

$B_1 = 200$ $\qquad B_2 = B_1 + \frac{2}{100}B_1 = 204$ $\qquad B_3 = B_2 + \frac{2}{100}B_2 = 208{,}08$

2) (A_n) est une suite arithmétique de raison 5 donc $A_n = A_1 + 5(n-1)$ pour tout $n\in\mathbf{N}^*$
en particulier $A_{36} = 200 + 5\times35 = 375$

$B_{n+1} = B_n + \frac{2}{100}B_n = (1+\frac{2}{100})B_n = 1{,}02B_n$ pour tout $n\in\mathbf{N}^*$ donc (B_n) est une suite géométrique de raison 1,02
donc $B_n = B_1\times q^{n-1}$ pour tout $n\in\mathbf{N}^*$ et en particulier $B_{36} = 200\times1{,}02^{35} \approx 399{,}98$

3) Le contrat le plus avantageux est celui qui engendre le plus faible coût total

$$A_1 + A_2 + ... + A_{36} = (200+0\times5)+(200+1\times5)+...+(200+35\times5) = 36\times200+5\times(1+2+...+35)$$

$$= 7\,200 + 5\times\frac{35\times(35+1)}{2} = 10\,350$$

$$B_1+B_2+...+B_{36}=200+200\times 1{,}02+...+200\times 1{,}02^{35}=200\times(1+1{,}02+...+1{,}02^{35})=200\times\frac{1-1{,}02^{35+1}}{1-1{,}02}$$

$\approx 10\,398{,}87$ donc le contrat le plus avantageux est le contrat A

Exercice 39 :

1) En notant n la page à laquelle en est Jean : $1+2+3+...+n=351 \Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2}=351 \Leftrightarrow n^2+n-702=0$

le discriminant de ce trinôme est $\Delta=2809>0$, d'où deux racines réelles $n_1=-27$ et $n_2=26$,
donc Jean en est à la page 26

2) En notant p le nombre total de pages du livre : $27+28+...+p=469 \Leftrightarrow (1+2+...+p)-(1+2+...+26)=469$

c'est-à-dire $\frac{p(p+1)}{2}-351=469 \Leftrightarrow p^2+p-1640=0$

le discriminant de ce trinôme est $\Delta=6561>0$, d'où deux racines réelles $n_1=-41$ et $n_2=40$,
donc le livre de Jean comporte 40 pages

Exercice 40 :

Notons n le nombre de voleurs et p le nombre d'appareils volés : $1+2+3+...+n=p$ et $5n=p$

donc $\frac{n(n+1)}{2}=5n \Leftrightarrow n^2-9n=0 \Leftrightarrow n(n-9)=0 \Leftrightarrow n=0$ ou $n=9$

il y a 9 voleurs (l'autre cas est inintéressant bien que cohérent) et $p=5\times 9=45$ appareils

Exercice 41 :

1) Notons r la raison de la suite : les côtés mesurent 1, $1+r$ et $1+2r$, et $r>0$ car 1 est la mesure du plus petit côté

alors d'après le théorème de Pythagore : $1^2+(1+r)^2=(1+2r)^2 \Leftrightarrow 0=3r^2+2r-1$

le discriminant de ce trinôme est $\Delta=16>0$, d'où deux racines réelles $r_1=-1$ (impossible) et $r_2=\frac{1}{3}$

les côtés mesurent 1, $\frac{4}{3}$ et $\frac{5}{3}$

1) Notons q la raison de la suite : les côtés mesurent 1, q et q^2 et $q>1$ car 1 est la mesure du plus petit côté

d'après le théorème de Pythagore : $1^2+q^2=(q^2)^2 \Leftrightarrow 0=q^4-q^2-1 \Leftrightarrow Q^2-Q-1=0$ en posant $Q=q^2$

le discriminant de ce trinôme est $\Delta=5>0$, d'où deux racines réelles $Q_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (impossible) et $Q_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(Q_2 est le nombre d'or φ) or $q>0$ donc $q=\sqrt{\varphi}$ et les côtés mesurent 1, $\sqrt{\varphi}$ et φ

Exercice 42 :

$S=(1-2)(1+2)+(3-4)(3+4)+(5-6)(5+6)+...+(2011-2012)(2011+2012)+(2013-2014)(2013+2014)$
$=-3+(-7)+(-11)+...+(-4023)+(-4027)$

S est une somme de termes consécutifs de la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_1=-3$ et de raison $r=-4$
dans laquelle -4027 est le terme d'indice k tel que $u_k=u_1+(k-1)r \Leftrightarrow -4027=-3-4(k-1) \Leftrightarrow k=1007$

$S=(-3-0\times 4)+(-3-0\times 4)+(-3-0\times 4)+...+(-3-0\times 4)+(-3-0\times 4)$

$=1008\times(-3)-4\times(0+1+2+...+1006+1007)=-3024-4\times\frac{1007\times(1007+1)}{2}=2\,033\,136$

Exercice 43 :

$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+...+\frac{1}{x^8}=\frac{x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{x^8}$

et $(x+1)(x^6+x^4+x^2+1)=x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ pour tout réel $x\neq 0$

donc $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+...+\frac{1}{x^8}=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^6+x^4+x^2+1)=0$ et $x\neq 0$

or un carré est toujours positif donc $x^6+x^4+x^2+1=(x^3)^2+(x^2)^2+x^2+1\geq 1>0$ pour tout réel x, d'où $S=\{-1\}$

Exercice 44 :

Notons les triangles T_0, T_1, T_2 à partir du plus grand : les côtés de l'angle droit de T_k mesurent $\dfrac{1}{2^k}$

donc son aire est $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2^k}\times\dfrac{1}{2^k}=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^k$, et l'aire totale des n premiers triangles est :

$$A_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+\ldots+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{1}{2}\times\left[1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]=\frac{1}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}\times\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$$

or $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}=\dfrac{1}{4}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ est le terme général d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}\in\,]-1\,;1\,[$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}A_n=\frac{2}{3}$

Exercice 45 :

angle (en radians)	17π	$\frac{15\pi}{4}$	$\frac{49\pi}{2}$	$-\frac{67\pi}{6}$	$\frac{2345\pi}{11}$	54
mesure principale	π	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{9\pi}{11}$	$54-18\pi$

Exercice 46 :

$$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OJ}\right)=\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OI}\right)+\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)=-\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)=-\tfrac{7\pi}{8}+\tfrac{\pi}{2}=-\tfrac{3\pi}{8}\ [2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OB}\right)=\left(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OI}\right)+\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}\right)=-\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)+\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}\right)=-\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{3\pi}{5}=-\tfrac{11\pi}{10}=\tfrac{9\pi}{10}\ [2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right)=\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OJ}\right)+\left(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OA}\right)=-\left(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OB}\right)-\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OJ}\right)=\tfrac{3\pi}{8}-\tfrac{9\pi}{10}=-\tfrac{21\pi}{40}\ [2\pi]$$

Exercice 47 :

$a=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $\frac{25\pi}{6}=\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ donc $b=\frac{1}{2}$ $\qquad$ $-\frac{235\pi}{3}=\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ donc $c=\frac{1}{2}$

Exercice 48 :

a) $\sin 2x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sin 2x=\sin\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $2x=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi$

$\Leftrightarrow\ x=\frac{\pi}{12}+k\pi$ ou $x=\frac{5\pi}{12}+k\pi$ $\quad(k\in\mathbf{Z})$

b) $\cos^2 x=\frac{3}{4}\Leftrightarrow$ $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow\ x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ $\quad(k\in\mathbf{Z})$

c) $\sin 2x=\cos x\Leftrightarrow \cos(\frac{\pi}{2}-2x)=\cos x\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}-2x=x+2k\pi$ ou $\frac{\pi}{2}-2x=-x+2k\pi$

$\Leftrightarrow\ x=\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3}$ ou $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $\quad(k\in\mathbf{Z})$

Exercice 49 :

$A(x)=-\sin x+\sin x-\sin x+\sin x=0$

$B(x)=-\cos x\times\cos x-(-\sin x)^2=-\cos^2 x-\sin^2 x=-1$

$C(x)=\sin\frac{\pi}{3}\cos x+\cos\frac{\pi}{3}\sin x+\sin\frac{\pi}{3}\cos x-\cos\frac{\pi}{3}\sin x=2\times\frac{1}{2}\cos x=\cos x$

$D(x)=\cos^2 x+2\cos x\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x-2\cos x\sin x+\sin^2 x=2(\cos^2 x+\sin^2 x)=2$

Exercice 50 :

$\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}=\frac{4\pi}{12}+\frac{3\pi}{12}=\frac{7\pi}{12}$ donc $\cos\frac{7\pi}{12}=\cos(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

et $\sin\frac{7\pi}{12}=\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Exercice 51 :

$\cos^4 x-\sin^4 x=(\cos^2 x-\sin^2 x)(\cos^2 x+\sin^2 x)=\cos 2x\times 1=\cos 2x$ pour tout réel x

Exercice 52 :

$\dfrac{\sin 3x}{\sin x}-\dfrac{\cos 3x}{\cos x}=\dfrac{\sin 3x\cos x-\cos 3x\sin x}{\sin x\cos x}=\dfrac{\sin(3x-x)}{\frac{1}{2}\sin 2x}=2\times\dfrac{\sin 2x}{\sin 2x}=2$ pour tout x différent de $k\frac{\pi}{2}$ ($k\in\mathbf{Z}$).

Exercice 53 :

1) a) $\dfrac{1-\cos 2x}{\sin 2x}=\dfrac{1-(1-2\sin^2 x)}{2\sin x\cos x}=\dfrac{2\sin^2 x}{2\sin x\cos x}=\dfrac{\sin x}{\cos x}=\tan x$ pour tout $x\in]0;\frac{\pi}{2}[$.

b) $\tan\frac{\pi}{8}=\dfrac{1-\cos(2\times\frac{\pi}{8})}{\sin(2\times\frac{\pi}{8})}=\dfrac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}-2}{2}=\sqrt{2}-1$

$\tan\frac{\pi}{12}=\dfrac{1-\cos(2\times\frac{\pi}{12})}{\sin(2\times\frac{\pi}{12})}=\dfrac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}=\dfrac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=2-\sqrt{3}$

2) a) $1+\tan^2 x=1+\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)^2=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ pour tout $x\in]0;\frac{\pi}{2}[$

b) $\cos^2\frac{\pi}{8}=\dfrac{1}{1+\tan^2\frac{\pi}{8}}=\dfrac{1}{1+\left(\sqrt{2}-1\right)^2}=\dfrac{1}{1+2-2\sqrt{2}+1}=\dfrac{1}{4-2\sqrt{2}}=\dfrac{4+2\sqrt{2}}{\left(4-2\sqrt{2}\right)\left(4+2\sqrt{2}\right)}=\dfrac{4-2\sqrt{2}}{16-8}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$

et $\frac{\pi}{8}\in]0;\frac{\pi}{2}[$ donc $\cos\frac{\pi}{8}>0$ et donc $\cos\frac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

$\sin^2\frac{\pi}{8}=1-\cos^2\frac{\pi}{8}=\dfrac{4-\left(2-\sqrt{2}\right)}{4}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$ et $\frac{\pi}{8}\in]0;\frac{\pi}{2}[$ donc $\sin\frac{\pi}{8}>0$ d'où $\sin\frac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

3) a) $\tan(\frac{\pi}{2}-x)=\dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{\cos(\frac{\pi}{2}-x)}=\dfrac{\cos x}{\sin x}=\dfrac{1}{\tan x}$ pour tout $x\in]0;\frac{\pi}{2}[$

b) $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}=\frac{6\pi-\pi}{12}=\frac{5\pi}{12}$ donc $\tan\frac{5\pi}{12}=\dfrac{1}{\tan\frac{\pi}{12}}=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$

Exercice 54 :

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ donc $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)=\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BA}\right)=\pi+\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\right)=\pi-\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\pi-\alpha\ [2\pi]$

$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$ donc $\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=-\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)=\alpha-\pi\ [2\pi]$

$\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{BC}$ donc $\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{BC}\right)=\pi\ [2\pi]$

$\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$ donc $\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}\right)=\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{DC}\right)=\pi+\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AB}\right)=\pi+\pi+\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)=\pi-\alpha\ [2\pi]$

Exercice 55 :

1) a) AIB et ACJ sont rectangles isocèles en A et directs donc $\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AB}\right)=\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AJ}\right)=\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

et ABC est équilatéral direct donc $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

donc $\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ}\right)=\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AJ}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$

b) AIJ est isocèle en A donc ses angles à la base sont égaux, d'où $\left(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IA}\right)=\frac{1}{2}\left(\pi-\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ}\right)\right)=\frac{\pi}{12}\ [2\pi]$

2) $\left(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\pi+\left(\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BA}\right)-\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$

3) a) $\left(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IA}\right)+\left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}\right)+\left(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{BC}\right)=\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi}{12}=0\ [2\pi]$

b) D'après le résultat précédent $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires, donc $(IJ)//(BC)$

Exercice 56 :

a) I est le projeté orthogonal de A sur (BC) donc $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BC}=BI\times BC$ car $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et de même sens, d'où $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\frac{5}{2}\times 5=\frac{25}{2}$

b) De même $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CI}=\frac{5}{2}\times\frac{5}{2}=\frac{25}{4}$

c) $\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AI}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}\right).\overrightarrow{AI}=\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right).\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AI}=0$ car $(AI)\perp(BC)$

Exercice 57 :

ABC n'est pas rectangle en A (sinon on aurait $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$) ni en C (car l'hypoténuse serait $[AB]$ mais ce n'est pas le plus grand côté) ; supposons qu'il soit rectangle en B : on aurait d'après le théorème de Pythagore : $2^2+BC^2=3^2$ d'où $BC=\sqrt{5}$ et donc $\cos\hat{A}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

mais $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\hat{A}$ donc $\cos\hat{A}=\dfrac{4}{2\times 3}=\frac{2}{3}$, ce qui est contradictoire : ABC n'est pas rectangle

Exercice 58 :

a) $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{QP}$ sont colinéaires et de même sens donc $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{QP}=MN\times QP=6\times 6=36$

b) $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PN}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PN}=0$

c) $\overrightarrow{IN}$ et $\overrightarrow{IP}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{IN}.\overrightarrow{IP}=0$

d) $\overrightarrow{QI}$ et $\overrightarrow{NI}$ sont colinéaires et de sens contraires donc $\overrightarrow{QI}.\overrightarrow{NI}=-QI\times NI=-3\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}=-18$
(la diagonale d'un carré de côté a mesure $a\sqrt{2}$)

Exercice 59 :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2\right)=\frac{1}{2}(AC^2-AB^2-AD^2)$ car $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

$=\frac{1}{2}(7^2-4^2-5^2)=4$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}$ donc $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=-4$

et $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{DC}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{CB}\right\|^2\right)=\frac{1}{2}(DB^2-AB^2-AD^2)=\frac{1}{2}(DB^2-41)$

donc $\frac{1}{2}(DB^2-41)=-4\Leftrightarrow DB^2=33$ d'où $DB=\sqrt{33}$

Exercice 60 :

1) D'après le théorème de Pythagore : $AC^2=3^2+5^2=34$ donc $AC=\sqrt{34}$

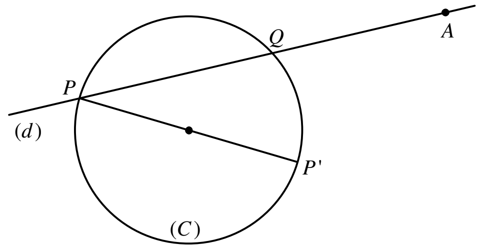
et $DE^2=3^2+(\frac{5}{2})^2=\frac{61}{4}$ donc $DE=\frac{\sqrt{61}}{2}$

2) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0$

et donc $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DE}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right).\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{2}AB^2-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}-AD^2=\frac{1}{2}\times 5^2-3^2=\frac{7}{2}$

3) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DE} = AC \times DE \times \cos\theta$ donc $\cos\theta = \frac{\frac{7}{2}}{\sqrt{34 \times \frac{\sqrt{61}}{2}}} = \frac{7}{\sqrt{2074}} \approx 0{,}1537$ donc $\theta \approx 81°$

<u>Exercice 61 :</u>



1) (C) a pour diamètre $[PP']$ et est circonscrit au triangle PQP',
qui est donc rectangle en Q, c'est-à-dire $(QP') \perp (d)$

$\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AP'} = \overrightarrow{AP}.\left(\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QP'}\right) = \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{QP'} = \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AQ}$

car $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{QP'} = 0$

2) $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AP'} = \left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP}\right).\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP'}\right) = AO^2 + \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{OP}.\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OP'}$

$= AO^2 + \overrightarrow{AO}.\left(\overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{OP}\right) - OP \times OP' = AO^2 + \overrightarrow{AO}.\vec{0} - R \times R = AO^2 - R^2$ (O est le milieu de $[PP']$)

3) $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AQ} = AO^2 - R^2$ est indépendant des points P et Q

<u>Exercice 62 :</u>

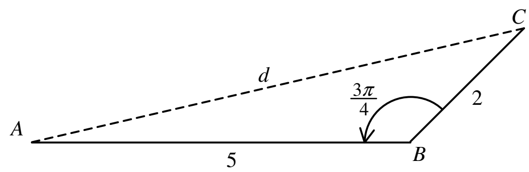
1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\hat{A} = 7 \times 4 \times \cos\frac{\pi}{3} = 28 \times \frac{1}{2} = 14$

et $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2\right) = \frac{1}{2}(BC^2 - BA^2 - AC^2) = \frac{1}{2}(BC^2 - 7^2 - 4^2) = \frac{1}{2}BC^2 - \frac{65}{2}$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow BC^2 = 37$ donc $BC = \sqrt{37}$

2) D'après la formule des sinus : $\frac{\sin\hat{A}}{BC} = \frac{\sin\hat{B}}{AC}$ donc $\sin\hat{B} = \frac{AC}{BC}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{4}{\sqrt{37}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{\frac{3}{37}}$

<u>Exercice 63 :</u>



$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = BC \times BA \times \cos\frac{3\pi}{4} = 2 \times 5 \times (-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -5\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2\right) = \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2 - BC^2)$

$= \frac{1}{2}(AC^2 - 5^2 - 2^2) = \frac{1}{2}AC^2 - \frac{29}{2}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$ donc $AC^2 = 29 + 10\sqrt{2}$ donc $d = AC = \sqrt{29 + 10\sqrt{2}} \approx 6{,}568$ km

<u>Exercice 64 :</u>

D'après la formule des sinus : $\frac{\sin\hat{A}}{BC} = \frac{\sin\hat{B}}{AC} = \frac{\sin\hat{C}}{AB}$ donc $\sin\hat{B} = \frac{AC}{BC}\sin\hat{A}$ et $\sin\hat{C} = \frac{AB}{BC}\sin\hat{A}$

et donc $\sin^2\hat{B} + \sin^2\hat{C} = \frac{AC^2}{BC^2}\sin^2\hat{A} + \frac{AB^2}{BC^2}\sin^2\hat{A} = \frac{AC^2 + AB^2}{BC^2}\sin^2\hat{A}$

$\sin^2\hat{A} = \sin^2\hat{B} + \sin^2\hat{C} \Leftrightarrow 1 = \frac{AC^2 + AB^2}{BC^2} \Leftrightarrow BC^2 = AC^2 + AB^2 \Leftrightarrow ABC$ est rectangle en A

<u>Exercice 65 :</u>

$\vec{u}.\vec{v} = 4876 \times 317019173 - 4898873 \times 315539$ n'a pas pour chiffre des unités 0 (car $6 \times 3 - 3 \times 9 \neq 0$)
donc $\vec{u}.\vec{v} \neq 0$: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux

<u>Exercice 66 :</u>

1) Soit I le milieu de $[AB]$: $I(\frac{-1+3}{2}\,;\frac{2+1}{2})$ c'est-à-dire $I(1\,;\frac{3}{2})$, et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3-(-1) \\ 1-2 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

(m) est la droite normale à $\overrightarrow{AB}$ passant par I donc $M(x\,;y) \in (m) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 0$

or $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ donc $M \in (m) \Leftrightarrow (x-1) \times 4 + (y - \frac{3}{2}) \times (-1) = 0 \Leftrightarrow 8x - 2y - 5 = 0$

2) (h) est la droite normale à $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ passant par A donc

$M(x\,;y)\in(h) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=0 \Leftrightarrow (x+1)\times(-1)+(y-2)\times 3=0 \Leftrightarrow x-3y+7=0$

3) $M(x\,;y)\in\Gamma \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CM}=0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)+(y-2)\,(y-4)=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-x-6y+6=0$

Exercice 67 :

La tangente (t) en A au cercle de centre O passant par A est la normale à $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ passant par A donc

$M(x\,;y)\in(t) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{OA}=0 \Leftrightarrow (x-3)\times 3+(y-5)\times 5=0 \Leftrightarrow 3x+5y-34=0$

Exercice 68 :

a) $x^2+y^2-2x-6y+5=0 \Leftrightarrow (x-1)^2-1+(y-3)^2-9+5=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-3)^2=5 \Leftrightarrow \Omega M^2=5$ où $\Omega(1\,;3)$

$\Leftrightarrow \Omega M=\sqrt{5}$: c'est le cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{5}$

b) $x^2+y^2-x-3y+3=0 \Leftrightarrow (x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{3}{2})^2=-\frac{1}{2}$: c'est l'ensemble vide

c) $x^2+y^2-x+8y+10=0 \Leftrightarrow (x-\frac{1}{2})^2+(y+4)^2=\frac{25}{4}$: c'est le cercle de centre $\Omega(\frac{1}{2}\,;-4)$ et de rayon $\frac{5}{2}$

Exercice 69 :

1) $M(x\,;y)\in(C) \Leftrightarrow \Omega M=5 \Leftrightarrow \Omega M^2=25 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y+3)^2=25 \Leftrightarrow x^2+y^2-4x+6y-12=0$

2) a) $(-2)^2+0^2-4\times(-2)+6\times 0-12=4+8-12=0$ donc $A\in(C)$

b) (t) est la normale à $\overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$ passant par A donc

$M(x\,;y)\in(t) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{\Omega A}=0 \Leftrightarrow (x+2)\times(-4)+y\times 3=0 \Leftrightarrow 4x-3y+8=0$

Exercice 70 :

$M(x\,;y)\in(C) \Leftrightarrow AM=3 \Leftrightarrow AM^2=9 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=9 \Leftrightarrow x^2+y^2-2x-4y-4=0$

Les points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses ont pour coordonnées $(x\,;0)$ avec $x^2+0^2-2x-4\times 0-4=0 \Leftrightarrow x^2-2x-4=0$: le discriminant de ce trinôme est $\Delta=20>0$, d'où deux racines réelles $x_1=-1-\sqrt{5}$ et $x_2=-1+\sqrt{5}$: (C) coupe l'axe des abscisses en $E(-1-\sqrt{5}\,;0)$ et $F(-1+\sqrt{5}\,;0)$

Les points d'intersection de (C) avec l'axe des ordonnées ont pour coordonnées $(0\,;y)$ avec $y^2-4y-4=0$: le discriminant de ce trinôme est $\Delta=32>0$, d'où deux racines réelles $y_1=-2-2\sqrt{2}$ et $y_2=-2+2\sqrt{2}$: (C) coupe l'axe des abscisses en $G(0\,;-2-2\sqrt{2})$ et $H(0\,;-2+2\sqrt{2})$

Exercice 71 :

(C) passe par A et B donc Ω est sur la médiatrice (m) de $[AB]$ qui est la normale à $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ passant par le milieu $I(\frac{3}{2}\,;2)$ de $[AB]$: $M(x\,;y)\in(m) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}=0 \Leftrightarrow (x-\frac{3}{2})\times(-1)+(y-2)\times 2=0 \Leftrightarrow 2x-4y+5=0$

$\Omega(x\,;y)$ est l'intersection de (m) et (δ) : $\begin{cases}2x-4y+5=0 & \times(-1)\\ x+y+1=0 & \times 2\end{cases}\Bigg|\times 4 \Leftrightarrow \begin{cases}6y-3=0\\ 6x+9=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\frac{1}{2}\\ x=-\frac{3}{2}\end{cases}$ et $\Omega(-\frac{3}{2}\,;\frac{1}{2})$

de plus $\Omega A^2=(2+\frac{3}{2})^2+(1-\frac{1}{2})^2=\frac{25}{2}$

$M(x\,;y)\in(C) \Leftrightarrow \Omega M=\Omega A \Leftrightarrow \Omega M^2=\frac{25}{2} \Leftrightarrow (x+\frac{3}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{25}{2} \Leftrightarrow x^2+y^2+3x-y-10=0$

Exercice 72 :

1) $AB^2=(2+2)^2+(2-2)^2=16$ donc d'après la formule de la médiane :

$MA^2+MB^2=40 \Leftrightarrow 2MI^2+\frac{1}{2}AB^2=40 \Leftrightarrow MI^2+4=20 \Leftrightarrow MI=4 \Leftrightarrow M\in(C)$

2) $I(0;2)$ donc $M(x;y)\in(C) \Leftrightarrow IM=4 \Leftrightarrow IM^2=16 \Leftrightarrow x^2+(y-2)^2=16 \Leftrightarrow x^2+y^2-4y-12=0$

3) Les points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses ont pour coordonnées $(x;0)$ avec
$x^2+0^2-4\times0-12=0 \Leftrightarrow x^2=12 \Leftrightarrow x=-2\sqrt{3}$ ou $x=2\sqrt{3}$:
(C) coupe l'axe des abscisses en $P(-2\sqrt{3};0)$ et $Q(2\sqrt{3};0)$

4) a) $K\in(C) \Leftrightarrow \sqrt{7}^2+\lambda^2-4\lambda-12=0 \Leftrightarrow \lambda^2-4\lambda-5=0$: le discriminant de ce trinôme est $\Delta=36>0$, d'où deux racines réelles $\lambda_1=-1$ et $\lambda_2=5$; or $\lambda<0$ donc $\lambda=-1$

b) (t) est la normale à $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}\sqrt{7}\\-3\end{pmatrix}$ passant par K donc

$M(x;y)\in(t) \Leftrightarrow \overrightarrow{KM}.\overrightarrow{IK}=0 \Leftrightarrow (x-\sqrt{7})\times\sqrt{7}+(y+2)\times(-3)=0 \Leftrightarrow x\sqrt{7}-3y-13=0$

Exercice 73 :

1) $M(x;y)\in(C_1)\cap(C_2) \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2-4x+6y+3=0\\x^2+y^2+2x-6y-15=0\end{cases} \Big| \times(-1) \Leftrightarrow \begin{cases}6x-12y-18=0\\x^2+y^2-4x+6y+3=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=2y+3\\(2y+3)^2+y^2-4(2y+3)+6y+3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2y+3\\5y^2+10y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2y+3\\y(y+2)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=0\\x=3\end{cases}$ ou $\begin{cases}y=-2\\x=-1\end{cases}$

d'où deux points d'intersection : $A(3;0)$ et $B(-1;-2)$

2) $M(x;y)\in(D)\cap(C_1) \Leftrightarrow \begin{cases}3x+y-13=0\\x^2+y^2-4x+6y+3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=13-3x\\x^2+(13-3x)^2-4x+6(13-3x)+3=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}y=13-3x\\10x^2-100x+250=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=13-3x\\x^2-10x+25=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=13-3x\\(x-5)^2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5\\y=-2\end{cases}$ d'où $K(5;-2)$

$M(x;y)\in(D)\cap(C_2) \Leftrightarrow \begin{cases}3x+y-13=0\\x^2+y^2+2x-6y-15=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=13-3x\\x^2+(13-3x)^2+2x-6(13-3x)-15=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}y=13-3x\\10x^2-58x+76=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=13-3x\\5x^2-29x+38=0\end{cases}$: ce trinôme a pour discriminant $\Delta=81>0$

et possède donc deux racines réelles $x_1=2$ et $x_2=\frac{19}{5}$, d'où les points $P(2;7)$ et $Q(\frac{19}{5};\frac{8}{5})$

Exercice 74 :

A et B sont incompatibles donc $A\cap B=\varnothing$ d'où $p(A\cap B)=0$

$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=0{,}9$ $\quad p(\overline{A})=1-p(A)=0{,}8$ $\quad p(\overline{B})=1-p(B)=0{,}3$

Exercice 75 :

L'univers est constitué des vingt entiers de 1 à 20, qui sont équiprobables

$A=\{2;4;6;8;10;12;14;16;18;20\}$ donc $p(A)=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$

$B=\{4;8;12;16;20\}$ donc $p(B)=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$ $\quad C=\{7;14\}$ donc $p(C)=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$

$D=\{2;3;5;7;11;13;17;19\}$ donc $p(D)=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$

$E=\{2;6;10;14;18\}$ donc $p(E)=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$

$A\cap B=B$ donc $p(A\cap B)=\frac{1}{4}$ $\quad p(A\cup B)=A$ donc $p(A\cup B)=\frac{1}{2}$

$A\cap C=\{14\}$ donc $p(A\cap C)=\frac{1}{20}$ $\quad p(A\cup C)=p(A)+p(C)-p(A\cap C)=\frac{11}{20}$

$A\cap D=\{2\}$ donc $p(A\cap D)=\frac{1}{20}$ $\quad p(A\cup D)=p(A)+p(D)-p(A\cap D)=\frac{17}{20}$

Exercice 76 :

1) Notons p_{pair} la probabilité d'obtenir chaque numéro pair et p_{impair} celle d'obtenir chaque numéro impair :
$p_{pair} = 2\,p_{impair}$ et $3\,p_{pair} + 3\,p_{impair} = 1$ donc $3\,p_{pair} + \frac{3}{2}\,p_{pair} = 1 \Leftrightarrow p_{pair} = \frac{2}{9}$

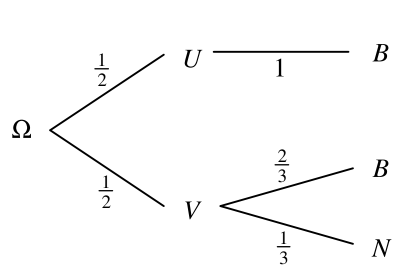
2) a) Notons X le nombre de chiffres pairs obtenus : X suit la loi binômiale $B(2\,;\frac{2}{3})$ car c'est le nombre de succès obtenus dans la répétition de 2 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes où la probabilité de succès (obtenir un chiffre pair) est $3\,p_{pair} = \frac{2}{3}$ et $p(X=2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times (\frac{2}{3})^2 \times (\frac{1}{3})^0 = 1 \times \frac{4}{9} = \frac{4}{9}$

b) Notons Y le nombre de 6 obtenus : Y suit la loi binômiale $B(2\,;\frac{2}{9})$ car c'est le nombre de succès obtenus dans la répétition de 2 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes où la probabilité de succès (obtenir un 6) est $p_{pair} = \frac{2}{9}$ et $p(Y=2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times (\frac{2}{9})^2 \times (\frac{1}{9})^0 = 1 \times \frac{4}{81} = \frac{4}{81}$

Exercice 77 :

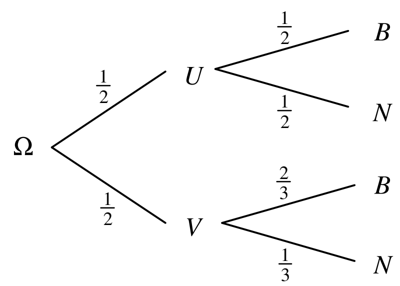
Notons B l'événement « tirer une boule blanche » et N l'événement « tirer une boule noire »
Dans chaque urne, on suppose les boules équiprobables

1)



$p(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$

2)



$p(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{7}{12}$

Exercice 78 :

Notons R l'événement « l'équation $x^2 + px + q = 0$ admet au moins une solution réelle » :
il est réalisé lorsque le discriminant $\Delta = p^2 - 4q$ est positif ou nul (en gras dans le tableau ci-contre)

q \ p	1	2	3	4	5	6
1	-3	**0**	**5**	**12**	**21**	**32**
2	-7	-4	**1**	**8**	**17**	**28**
3	-11	-8	-3	**4**	**13**	**24**
4	-15	-12	-7	**0**	**9**	**20**
5	-19	-16	-11	-4	**5**	**16**
6	-23	-20	-15	-8	**1**	**12**

les 36 issues étant équiprobables : $p(R) = \frac{19}{36}$

Exercice 79 :

1) $p(X=4) = 1 - (0{,}15 + 0{,}2 + 0{,}25 + 0{,}15 + 0{,}05) = 0{,}2$ $\quad p(X \le 4) = 0{,}15 + 0{,}2 + 0{,}25 + 0{,}2 = 0{,}8$

2) À la calculatrice ou au tableur : $E(X) = 3{,}15$ et $\sigma(X) \approx 1{,}424$

Exercice 80 :

1) a) À la calculatrice ou au tableur : $E(X) = 0{,}104$: c'est le nombre moyen de défauts par pièce sur un grand nombre de pièces

b) À la calculatrice ou au tableur : $\sigma(X) \approx 0{,}386$, donc $V(X) = \sigma(X)^2 \approx 0{,}149$

2) a)

y	6	-4	-9	-19
$p(Y=y)$	0,92	0,06	0,016	0,004

b) À la calculatrice ou au tableur : $E(X)=5{,}06$: c'est le bénéfice moyen par pièce sur un grand nombre de pièces

Exercice 81 :

β \ α	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$
0	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

1) a) $X \in \{-\frac{\sqrt{3}}{2} ; 0 ; \frac{\sqrt{3}}{2}\}$

b)

x	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$p(X=x)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$

2) a) $E(X)=-\frac{4}{9}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{9}\times 0+\frac{4}{9}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=0$ (prévisible car la loi de probabilité de X est "symétrique")

b) $V(X)=\frac{4}{9}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{9}\times 0^2+\frac{4}{9}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{2}{3}$

Exercice 82 :

1) a)

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

b) Les issues sont équiprobables donc

x	1	2	3	4	5	6
$p(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{36}$

c) $E(X)=\frac{161}{36}\approx 4{,}472$

$V(X)=\frac{2555}{1296}\approx 1{,}97$ donc $\sigma(X)=\frac{\sqrt{2555}}{36}\approx 1{,}404$

2) a)

g	-2	2
$p(G=g)$	$\frac{7}{12}$	$\frac{5}{12}$

b) $E(G)=\frac{1}{3}$: c'est le gain moyen par partie d'un joueur qui effectuerait un grand nombre de parties
$E(G)<0$: ce jeu est défavorable au joueur

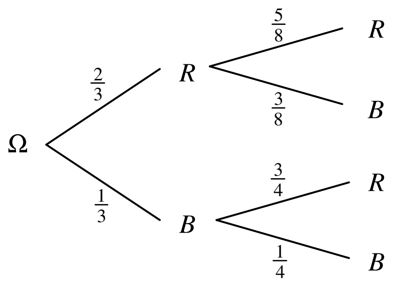
c) Si au lieu de 4 €, le gain en cas de victoire était de x €, la loi de probabilité de G deviendrait :

g	-2	$x-2$
$p(G=g)$	$\frac{7}{12}$	$\frac{5}{12}$

$E(G)=0 \Leftrightarrow \frac{7}{12}\times(-2)+\frac{5}{12}(x-2)=0 \Leftrightarrow x=\frac{24}{5}=4{,}8$ €

Exercice 83 :

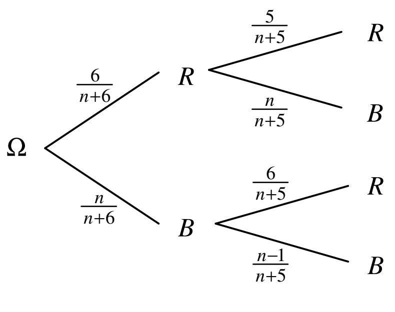
1) Notons R l'événement « tirer une boule rouge » et B l'événement « tirer une boule blanche »



a) Notons M l'événement « les deux boules ont même couleur »
$p(M)=\frac{2}{3}\times\frac{5}{8}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

b) $p(\overline{M})=1-p(M)=\frac{1}{2}$

2)



a) $p(X=1)=\frac{6}{n+6}\times\frac{5}{n+5}+\frac{n}{n+6}\times\frac{n-1}{n+5}=\frac{n^2-n+30}{(n+6)(n+5)}$

$p(X=-1)=\frac{6}{n+6}\times\frac{n}{n+5}+\frac{n}{n+6}\times\frac{6}{n+5}=\frac{12n}{(n+6)(n+5)}$

b) $E(X)=\frac{n^2-n+30}{(n+6)(n+5)}\times 1+\frac{12n}{(n+6)(n+5)}\times(-1)=\frac{n^2-13n+30}{(n+6)(n+5)}$

c) Le jeu est équitable lorsque $E(X)=0 \Leftrightarrow n^2-13n+30=0$
$\Delta=49>0$ d'où deux racines réelles $n_1=3$ et $n_2=10$

d)

n	2		3		10		$+\infty$
$n^2-13n+30$		+	0	−	0	+	

$E(X)$ a le signe de son numérateur et le jeu est favorable au joueur lorsque $E(X)>0$ c'est-à-dire lorsque $n=2$ ou $n\geq 10$

Exercice 84 :

a) C'est un schéma de Bernoulli avec $n=3$ et $p=\frac{3}{8}$

b) Ce n'est pas un schéma de Bernoulli

c) Ce n'est pas un schéma de Bernoulli

d) Ce n'est pas un schéma de Bernoulli

e) C'est un schéma de Bernoulli avec $n=12$ et $p=\frac{1}{8}$

Exercice 85 :

Notons X la variable aléatoire égale au nombre de joueurs gagnants : elle suit la loi binômiale $B(10\,;\frac{5}{16})$ car c'est le nombre de succès lors de la répétition de 10 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes où la probabilité de succès est $\frac{5}{16}$ (cinq secteurs sont gagnants parmi les seize secteurs équiprobables)

1) $p(X=5)=\binom{10}{5}\times(\frac{5}{16})^5\times(\frac{11}{16})^5\approx 0{,}115$ 2) $p(X\le 9)=1-p(X=10)=1-\binom{10}{5}\times(\frac{5}{16})^{10}\times(\frac{11}{16})^0\approx 0{,}999\,991$

Exercice 86 :

On considère que chaque grossesse menée à terme donne naissance soit à un, soit à deux enfants

1) a) X suit la loi binômiale $B(0\,;0{,}3)$ car c'est le nombre de succès lors de la répétition de 3 expériences aléatoires à deux issues possibles (grossesse gemellaire ou non), identiques et indépendantes, où la probabilité de succès est 0,3

b) $p(X\ge 2)=p(X=2)+p(X=3)=\binom{3}{2}\times 0{,}3^2\times 0{,}7^1+\binom{3}{3}\times 0{,}3^3\times 0{,}3^0=3\times 0{,}09\times 0{,}7+1\times 0{,}027\times 1=0{,}216$

2) a)

y	3	4	5	6
$p(Y=y)$	0,343	0,441	0,189	0,027

b) À la calculatrice ou au tableur : $E(X)=3{,}9$: c'est le nombre moyen d'enfants par couple dans une population où tous les couples sont semblables à celui de l'exercice

Exercice 87 :

• Dans le premier cas, la probabilité est $p_1=\frac{1}{6}\approx 0{,}167$

• dans le second cas, c'est $p_2=p(X\ge 2)$, où X est une variable aléatoire suivant la loi binômiale $B(4\,;\frac{1}{6})$ c'est-à-dire $p_2=1-p(X\le 1)\approx 0{,}132$

• dans le troisième cas, c'est $p_3=p(Y\ge 4)$, où Y est une variable aléatoire suivant la loi binômiale $B(8\,;\frac{1}{6})$ c'est-à-dire $p_3=1-p(Y\le 3)\approx 0{,}031$

c'est donc dans le premier cas que la probabilité est la plus élevée

Exercice 88 :

Pour un avion bimoteur, le nombre X de moteurs en panne suit la loi binômiale $B(2\,;p)$

la probabilité qu'il s'écrase est $P_2=p(X=2)=\binom{2}{2}\times p^2\times(1-p)^0=p^2$

Pour un quadrimoteur, le nombre Y de moteurs en panne suit la loi binômiale $B(4\,;p)$

la probabilité qu'il s'écrase est $P_4=p(Y\ge 3)=p(Y=3)+p(Y=4)=\binom{4}{3}\times p^3\times(1-p)^1+\binom{4}{4}\times p^4\times(1-p)^0$

c'est-à-dire $P_4=4p^3(1-p)+p^4=p^3(4-3p)$

$P_2-P_4=p^2[1-p(4-3p)]=p^2(3p^2-4p+1)$ qui a le signe du second facteur, dont le discriminant est $\Delta=4>0$, d'où deux racines réelles $p_1=\frac{1}{3}$ et $p_2=1$ et :

p	0		$\frac{1}{3}$		1
P_2-P_4	0	+	0	−	0

si $p<\frac{1}{3}$ alors $P_2>P_4$ et c'est le quadrimoteur le plus sûr

si $p>\frac{1}{3}$ alors $P_2<P_4$ et c'est le bimoteur le plus sûr

si $p=\frac{1}{3}$ (ou si $p=0$ ou $p=1$) alors $P_2=P_4$ et les deux se valent

Exercice 89 :

1) À la calculatrice ou au tableur : $\bar{x} = 10''1175$ et $\bar{y} = 10''1475$

2) À la calculatrice ou au tableur : $\sigma_x \approx 0''13$ et $\sigma_y = 0{,}145$

3) $\bar{x} < \bar{y}$ et $\sigma_x < \sigma_y$: le premier sprint a été plus rapide et plus homogène

Exercice 90 :

1) La classe compte 24 élèves : la médiane se situe entre la 12ème et la 13 ème note

Q_1 et Q_3 sont respectivement la 6ème et la 18ème valeurs de la série

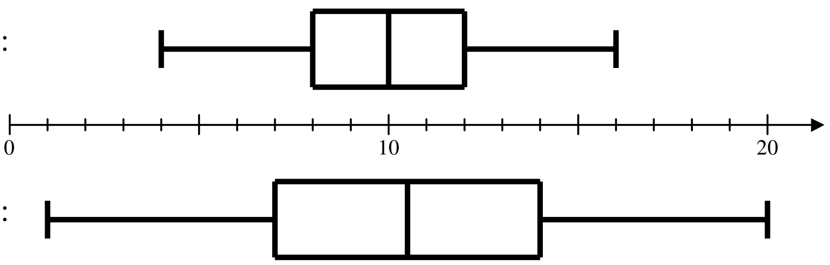
a) $Me = 10$ $\quad$ $Q_1 = 8$ et $Q_3 = 12$

b) $Me' = 10{,}5$ $\quad$ $Q'_1 = 7$ et $Q'_3 = 14$

c)

en maths :

en physique :



le devoir de physique a été mieux réussi mais les résultats sont beaucoup plus hétérogènes

2) a) À la calculatrice ou au tableur : $m = 10{,}375$ et $m' = 10{,}75$

$m < m'$: le devoir de physique a été mieux réussi

b) À la calculatrice ou au tableur : $\sigma \approx 2{,}87$ et $\sigma' \approx 4{,}5$

$\sigma < \sigma'$: les résultats de physique sont plus hétérogènes

Exercice 91 :

1) φ est dérivable sur **R** (polynôme) et pour tout réel t :

$$\varphi'(t) = f_1 \times 2(x_1 - t)\times(-1) + f_2 \times 2(x_2 - t)\times(-1) + \ldots + f_k \times 2(x_k - t)\times(-1)$$

$$= 2[(\underbrace{f_1 + f_2 + \ldots + f_k}_{1})t - (\underbrace{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_kx_k}_{m})] = 2(t - m) \text{ donc :}$$

t	$-\infty$		m		$+\infty$
$\varphi'(t)$		$-$	0	$+$	
φ		$\searrow$	$\varphi(m)$	$\nearrow$	

2) φ admet un minimum en m, qui vaut par définition $\varphi(m) = V$