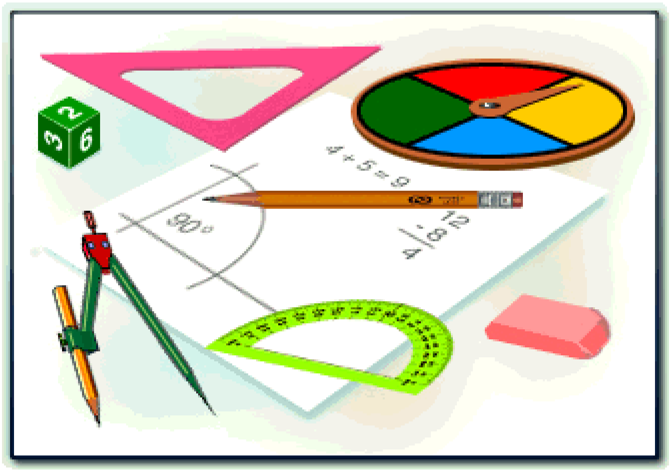


MATHEMATIQUES

CAHIER DE REVISIONS ETE 2018

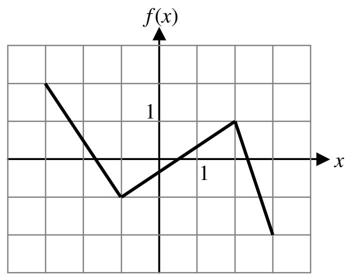
ENTREE EN TERMINALE S

thème		exercices
ANALYSE	fonctions de référence	1 - 4
	second degré	5 - 18
	dérivation	19 - 29
	suites numériques	30 - 44
GÉOMÉTRIE	trigonométrie	45 - 55
	produit scalaire	56 - 65
	géométrie analytique	66 - 73
probabilités		74 - 88
statistiques		89 - 91

Fonctions de référence

Exercice 1
Résoudre les (in)équations suivantes :
a) $|x| = -3$ b) $|x| \leq 15$ c) $|x-6| = 2$ d) $|3x+9| = 5$ e) $|x-3| > \frac{1}{2}$

Exercice 2
On considère une fonction f définie sur $[-3\,;3]$ dont la représentation graphique est donnée ci-contre :



Préciser l'ensemble de définition et représenter graphiquement chacune des fonctions définies ci-dessous :

$f_1(x) = -f(x)$ $f_3(x) = f(x) + 1$
$f_2(x) = |f(x)|$ $f_4(x) = f(x+1)$

Exercice 3
Le but de l'exercice est de comparer les deux nombres $A = \dfrac{1{,}0000002}{1{,}0000004}$ et $B = \dfrac{0{,}9999996}{0{,}9999998}$.

0) Que donne la calculatrice ? Qu'en pensez-vous ?
1) Soient f et g les fonctions définies par $f(x) = \dfrac{1+2x}{1+4x}$ et $g(x) = \dfrac{1-4x}{1-2x}$.
   a) Quels sont les ensembles de définition D_f et D_g des fonctions f et g ?
   b) Que valent $f(10^{-7})$ et $g(10^{-7})$?
2) Pour comparer les nombres A et B, on va comparer les fonctions f et g en étudiant le signe de la différence $\varphi(x) = f(x) - g(x)$.
   a) Démontrer que $\varphi(x) = \dfrac{12x^2}{(1+4x)(1-2x)}$.
   b) Résoudre l'inéquation $\varphi(x) > 0$.
   c) En déduire le signe de $\varphi(10^{-7})$ et conclure.

Exercice 4
Soient a et b deux réels positifs.
1) Développer $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2$.
2) a) Démontrer que $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$.
   b) Démontrer que $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$ si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$.

Second degré

Exercice 5
Résoudre dans **R** l'inéquation $(2x+1)(5-x) < (x-5)(x+4)$.

Exercice 6

Résoudre dans **R** l'équation $6x^4 - 5x^2 + 1 = 0$ (on pourra poser $X = x^2$)

Exercice 7

Résoudre dans **R** les inéquations suivantes :

a) $-2x^2 + 7x - 5 \leq 0$ b) $\dfrac{3x^2 + x + 1}{x^2 - 3x - 10} > 0$ c) $\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^4 - 4} \leq 0$

Exercice 8

Résoudre dans **R** les équations suivantes :

a) $\dfrac{2x-5}{x-1} = \dfrac{x-1}{x+1}$ b) $\dfrac{x^2 - x + 1}{x+2} = 2x + 3$

Exercice 9

Résoudre dans **R** l'inéquation $(x^2 + 2x - 4)^2 < 9$.

Exercice 10

On considère les fonctions f et g définies sur **R** par $f(x) = x^2 - 4x - 5$ et $g(x) = -2x^2 + 4x - 2$.

1) Déterminer la forme canonique de $f(x)$ et de $g(x)$.

2) Dresser le tableau de variation de f et de g.

3) On note φ la fonction définie sur **R** par $\varphi(x) = f(x) - g(x)$.

   a) Déterminer la forme canonique de $\varphi(x)$.

   b) Factoriser $\varphi(x)$.

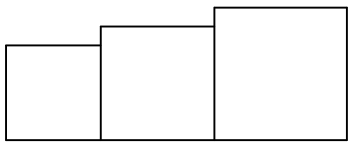
   c) Calculer les coordonnées des points d'intersection des courbes C_f et C_g représentatives de f et g.

   d) Étudier la position relative des courbes C_f et C_g.

4) Tracer les courbes C_f et C_g dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 11

1) Peut-on trouver trois carrés ayant pour côtés des entiers consécutifs et dont la somme des aires soit 15 125 ?
   Si oui, préciser les valeurs que doivent avoir les côtés.



2) Reprendre la question précédente avec une aire totale égale à 15 127.

Exercice 12

On achète pour 77 € d'essence à une station-service. On s'aperçoit ensuite qu'à une autre station, le prix du litre est inférieur de 0,14 € : on aurait pu ainsi obtenir 5 litres de plus pour le même prix.
Quel prix a-t-on payé le litre d'essence et quelle quantité en a-t-on acheté ?

Exercice 13

Au fond d'un canyon coule une rivière. Du bord du surplomb rocheux, on laisse tomber une pierre et on chronomètre le temps écoulé entre le lâcher de la pierre et l'instant où l'on entend "plouf" : 4,5 secondes s'écoulent. Le but de l'exercice est de déterminer la profondeur p du canyon.
La distance parcourue par la pierre en fonction du temps t est $d = \frac{1}{2} g t^2$ (g est l'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre ; on prendra $g = 10\,\text{m.s}^{-2}$).
La distance parcourue par le son en fonction du temps t est $d = ct$ (c est la célérité du son dans l'air ; on prendra $c = 320\,\text{m.s}^{-1}$).

1) On note t_1 le temps de chute de la pierre. Écrire une relation entre t_1 et p.

2) On note t_2 le temps de remontée du son. Écrire une relation entre t_2 et p.

3) Exprimer t_2 en fonction de t_1.

4) Démontrer que t_1 est solution de l'équation $t^2 + 64t - 288 = 0$.

5) Résoudre cette équation et en déduire p.

Exercice 14

Le trinôme du second degré P est défini sur **R** par $P(x)=4x^2-\left(\sqrt{6}+4\sqrt{3}\right)x+\sqrt{18}$.

1) Vérifier que $\frac{\sqrt{6}}{4}$ est une racine de P.

2) Déterminer la valeur exacte de l'autre racine de P.

Exercice 15

Soient a et b deux réels fixés, avec $a\neq 0$. On considère l'équation (E) : $ax^2+bx-a=0$.
Démontrer que l'équation (E) possède deux solutions réelles qui sont de signes contraires.

Exercice 16

Dans un repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$, une parabole P admet pour équation $y=ax^2+bx+c$ (où $a\neq 0$).

1) Déterminer les coefficients a, b et c sachant que P coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse 3 et l'axe des ordonnées au point B d'ordonnée 2, et que son sommet a pour abscisse 1.

2) Déterminer l'abscisse du second point d'intersection de P avec l'axe des abscisses.

Exercice 17

On note f la fonction définie sur **R** par $f(x)=-x^3-4x^2+27x+90$.

1) Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x)=(x+3)(ax^2+bx+c)$ pour tout réel x.

2) En déduire les racines de f puis dresser son tableau de signe.

Exercice 18

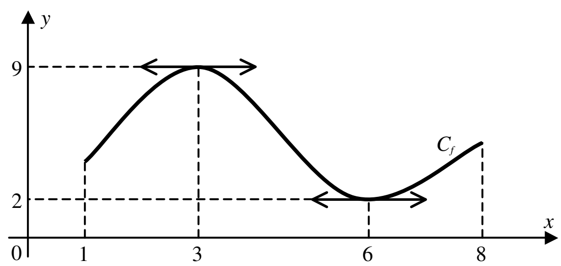
Résoudre dans **R** les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-35 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=1 \\ 4xy=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2+y^2=35 \\ xy=14 \end{cases}$

Dérivation

Exercice 19

Ci-contre est donnée la courbe C_f représentant une fonction f définie et dérivable sur [1 ; 8].



1) Par lecture graphique, donner la valeur de :
$f(3)$; $f'(3)$; $f(6)$; $f'(6)$

2) Le graphique ne permet pas la lecture de $f'(4)$.
Préciser néanmoins son signe.

Exercice 20

Dériver les fonctions définies ci dessous :

1) $f(x)=3x^4-2x^3+5x-4$ $g(x)=\sqrt{x}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$ $h(x)=\dfrac{x+5}{x^2+1}$

2) $f(x)=(2x^2+3)(3x^3-7)$ $g(x)=\left(\dfrac{2x+4}{3x-1}\right)^2$ $h(x)=\dfrac{x}{x+\sqrt{x}}$

Exercice 21

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}\setminus\{\,1\,\}$ par $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$. On note C_f sa représentation graphique.

1) Déterminer la dérivée f' de f.

2) Soit A le point d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses. Calculer les coordonnées de A, puis déterminer une équation de la tangente (t_A) à la courbe C_f en A.

3) Soit B le point d'intersection de C_f avec l'axe des ordonnées. Calculer les coordonnées de B, puis déterminer une équation de la tangente (t_B) à la courbe C_f en B.

4) Tracer dans un même repère (t_A), (t_B) et C_f.

5) En combien de point(s) de C_f la tangente est-elle parallèle à la droite (AB) ?

Exercice 22

On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x)=x^3-4x^2+4x$.

1) a) Déterminer la dérivée f' de la fonction f, puis étudier son signe.
   b) En déduire le tableau de variations de f (on précisera les éventuels extrema).
2) Tracer la courbe représentative C_f de la fonction f sur l'intervalle $[-1\,;3]$.
3) Calculer les coordonnées des points d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.

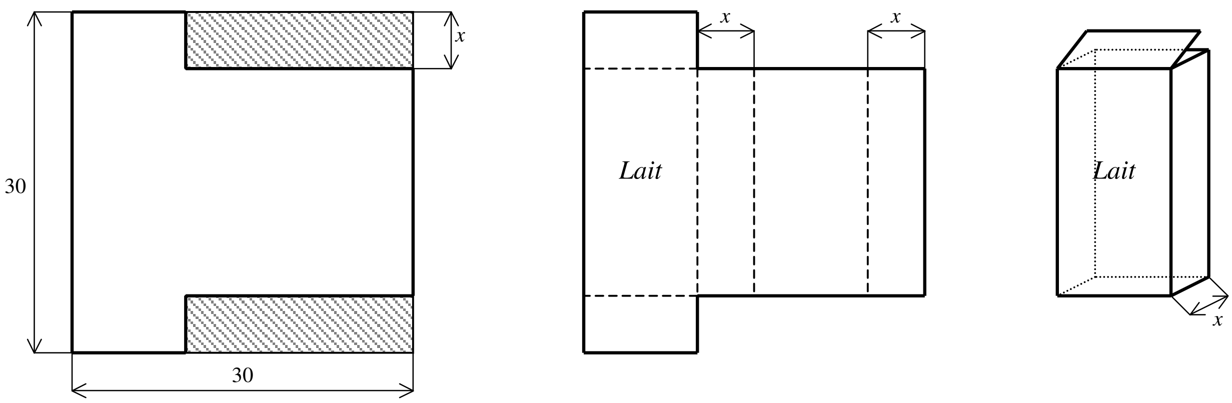
Exercice 23

On considère les deux fonctions f et g définies sur **R** par $f(x)=x^2-3x$ et $g(x)=x^3-3x$.

1) Étude de f
   a) Déterminer la dérivée f' de la fonction f, puis étudier son signe.
   b) En déduire le tableau de variations de f.
2) Étude de g
   a) Déterminer la dérivée g' de la fonction g, puis étudier son signe.
   b) En déduire le tableau de variations de g.
3) Comparaison des deux fonctions
   a) Tracer dans le même repère les courbes C_f et C_g représentant les fonctions f et g sur l'intervalle $[-2\,;2]$.
   b) Combien de point(s) d'intersection semble-t-il y avoir entre C_f et C_g ? Quelles semblent être leurs coordonnées ?
   c) Résoudre algébriquement l'équation $f(x)=g(x)$ et en déduire les coordonnées des points d'intersection entre C_f et C_g.

Exercice 24

1) On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x)=x^3-30x^2+225x$.
   a) Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.
   b) Déterminer une équation de la tangente Δ à la représentation graphique C_f de f en son point d'abscisse 0.
   c) Déterminer les abscisses des points d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.
   d) Tracer Δ et C_f sur l'intervalle $[0\,;20]$.
2) Un fabriquant envisage la production de boîtes de lait en carton obtenues en découpant deux bandes (hachurées sur la figure) de même largeur x (en centimètres) dans une feuille carrée de côté 30 cm.



   a) Quelles sont les valeurs possibles pour x ?
   b) Calculer le volume de la boîte lorsque $x=10$.
   c) Exprimer le volume V de la boîte en fonction de x.
   d) Si le fabriquant désire des boîtes à base carrée, quelle valeur de x doit-il choisir ?
   e) Pour quelle valeur de x le volume de la boîte est-il maximal ?

Exercice 25

Un camion doit accomplir un trajet de 150 km sur l'autoroute. Sa consommation de gasoil est de $6+\dfrac{v^2}{300}$ litres par heure, où v désigne sa vitesse en km/h.

Le prix du gasoil est de 0,9 € par litre, et on paie le chauffeur 12 € par heure.

1) a) On note t la durée en heures du trajet. Exprimer t en fonction de la vitesse v.
   b) En déduire le prix de revient $P(v)$ du trajet en fonction de v.
2) Quelle doit être la vitesse v du camion pour que le prix de revient du trajet soit minimal ?

Exercice 26

La fonction f définie sur **R** par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ est-elle dérivable en 0 ?

Si oui, déterminer $f'(0)$ puis une équation de la tangente à la courbe de f en son point d'abscisse 0.

Exercice 27

Dans un repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$, une parabole P admet pour équation $y = ax^2 + bx + c$ (où $a \neq 0$).
Déterminer les coefficients a, b et c sachant que P coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse 3 et qu'elle admet en son point B d'abscisse 0 la droite d'équation $y = 2x + 2$ pour tangente.

Exercice 28

1) Étudier le signe de $P(x) = (x-2)^2(x^2+4x+36)$.

2) f est la fonction définie sur **R** par $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + 12x + 76}{x^2 + 12}$

a) Calculer la dérivée f' de la fonction f et vérifier que $f'(x) = \dfrac{P(x)}{(x^2+12)^2}$ pour tout réel x.

b) En déduire le tableau de variations de f.

Exercice 29

f est une fonction définie sur [1 ; 5] par $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x}$,
où a, b et c sont trois réels fixés.
Déterminer a, b et c grâce au tableau de variation ci-contre :

x	1		2		5
f	7	↘	6	↗	

Suites numériques

Exercice 30

La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 8$. On sait que $u_{100} = 650$. Que vaut u_0 ?

Exercice 31

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 5 - 2n$ pour tout entier naturel n.
1) Démontrer que (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.
2) Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + ... + u_{100}$.

Exercice 32

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 5n$ pour tout entier naturel n.
1) Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3.
2) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Si oui, préciser sa raison.

Exercice 33

La suite (u_n) est arithmétique de raison r. On sait que $u_{50} = 406$ et que $u_{100} = 806$.
1) Calculer r et u_0.
2) Calculer la somme $S = u_{50} + u_{51} + ... + u_{100}$.

Exercice 34

On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_1 = 1$ et de raison $q = -2$.
1) Calculer u_2, u_3 et u_4.
2) Calculer u_{20}.
3) Calculer la somme $S = u_1 + u_2 + ... + u_{20}$.

Exercice 35

Déterminer un nombre x tel que les trois nombres 25 - x - 16 soient trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison négative.

Exercice 36
Calculer la valeur exacte des sommes suivantes :
$S_1 = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + ... + 59049$ $\qquad$ $S_2 = 1 + 4 + 7 + 10 + 13 + ... + 1000$

Exercice 37
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n}$ pour tout entier naturel n.
On admet que $u_n > 1$ pour tout entier naturel n.
1) Calculer u_1 et u_2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ?
2) On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$ pour tout entier naturel n.
a) Calculer v_0, v_1 et v_2 puis démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
b) Donner l'expression de v_n en fonction de n.
c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 38
Un étudiant loue une chambre pour 3 ans. On lui propose deux types de bail :
• contrat A : un loyer de 200 € pour le premier mois, puis une augmentation de 5 € par mois jusqu'à la fin du bail ;
• contrat B : un loyer de 200 € pour le premier mois, puis une augmentation de 2 % par mois jusqu'à la fin du bail.
1) Calculer, pour chacun des deux baux, le loyer du deuxième mois puis celui du troisième mois.
2) Calculer, pour chacun des deux baux, le loyer du dernier mois.
3) Quel est le contrat le plus avantageux ?

Exercice 39
Jean est en train de lire un livre. En additionnant les numéros de toutes les pages qu'il a déjà lues, il obtient 351. En additionnant les numéros de toutes les pages qu'il lui reste à lire, il obtient 469.
1) À quelle page en est Jean ?
2) Combien de pages ce livre comporte-t-il ?
(on supposera que le livre commence à la page 1)

Exercice 40
Les V.H.F. (voleurs fortement hiérarchisés) ont tous, dans leur bande, un grade différent. Comme ils avaient, une nuit, volé un lot d'appareils photographiques, leur chef déclara :
"le moins gradé en prendra un. Celui du grade immédiatement supérieur, deux. Celui du grade suivant, trois. Et ainsi de suite."
Mais les voleurs se révoltèrent contre cette injustice :
"nous en prendrons cinq chacun", dit le plus audacieux. Et ainsi fut fait.
Combien d'appareils les V.H.F. avaient-ils volés ?

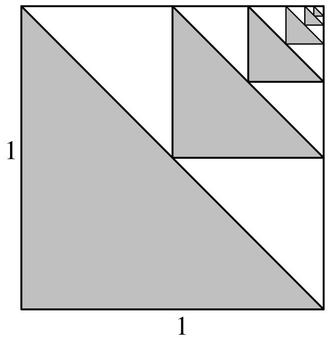
Exercice 41
ABC est un triangle rectangle dont le plus petit côté mesure une unité. Déterminer les longueurs de ses côtés si ce sont...
1) Trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.
2) Trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

Exercice 42
Calculer la somme $S = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + ... + 2013^2 - 2014^2$.

Exercice 43
Résoudre l'équation $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + ... + \dfrac{1}{x^8} = 0$ (on pourra remarquer que les solutions ne peuvent être positives)

Exercice 44

Calculer l'aire grisée (il y a une infinité de triangles) :



Trigonométrie

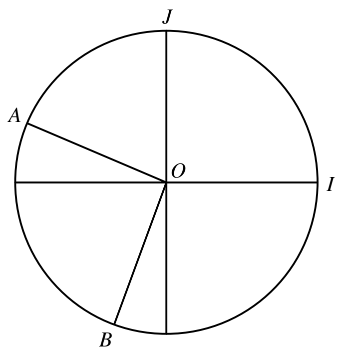
Exercice 45

Déterminer la mesure principale des angles suivants :

angle (en radians)	17π	$\frac{15\pi}{4}$	$\frac{49\pi}{2}$	$-\frac{67\pi}{6}$	$\frac{2345\pi}{11}$	54
mesure principale						

Exercice 46

Sur un cercle trigonométrique, on considère les points A et B tels que $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}\right)=\frac{7\pi}{8}\ [2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}\right)=-\frac{3\pi}{5}\ [2\pi]$.



En utilisant la relation de Chasles, déterminer la mesure principale des angles suivants :

$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OJ}\right)$ $\left(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OB}\right)$ $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right)$

Exercice 47

Déterminer la valeur des nombres suivants :

$a=\cos\frac{5\pi}{4}$ $b=\sin\frac{25\pi}{6}$ $c=\cos(-\frac{235\pi}{3})$

Exercice 48

Résoudre dans $\mathbf{R}$ les équations suivantes :

a) $\sin 2x=\frac{1}{2}$ b) $\cos^2 x=\frac{3}{4}$ c) $\sin 2x=\cos x$

Exercice 49

Simplifier au maximum les expressions suivantes :

$A(x)=\sin(\pi+x)+\cos(\frac{\pi}{2}-x)+\cos(\frac{\pi}{2}+x)+\sin(\pi-x)$

$C(x)=\sin(\frac{\pi}{3}+x)-\sin(\frac{\pi}{3}-x)$

$B(x)=\cos(x+\pi)\sin(\frac{\pi}{2}-x)-\sin^2(-x)$

$D(x)=(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2$

Exercice 50

En utilisant les formules d'addition, calculer la valeur exacte de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$ (on remarquera que $\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$).

Exercice 51

Démontrer que $\cos^4 x-\sin^4 x=\cos 2x$ pour tout réel x.

Exercice 52

Démontrer que $\dfrac{\sin 3x}{\sin x}-\dfrac{\cos 3x}{\cos x}=2$ pour tout réel x différent de $k\frac{\pi}{2}$ ($k\in\mathbf{Z}$).

Exercice 53

Pour tout réel $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), on pose $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

1) a) Démontrer que $\tan x = \dfrac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$ pour tout $x \in]0 ; \frac{\pi}{2}[$.

b) En déduire la valeur exacte de $\tan\frac{\pi}{8}$ et de $\tan\frac{\pi}{12}$.

2) a) Démontrer que $1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ pour tout $x \in]0 ; \frac{\pi}{2}[$.

b) En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{8}$ puis de $\sin\frac{\pi}{8}$.

3) a) Démontrer que $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \dfrac{1}{\tan x}$ pour tout $x \in]0 ; \frac{\pi}{2}[$.

b) En déduire que $\tan\frac{5\pi}{12} = 2+\sqrt{3}$.

Exercice 54

$ABCD$ est un parallélogramme. On pose $\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})\ [2\pi]$.

En utilisant les propriétés des angles orientés, exprimer en fonction de α les angles suivants :

$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ $\qquad$ $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{BC})$ $\qquad$ $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{BC})$ $\qquad$ $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC})$

Exercice 55

ABC est un triangle équilatéral direct, ABI et ACJ sont des triangles rectangles isocèles extérieurs à ABC.
Le but de l'exercice est de prouver que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.

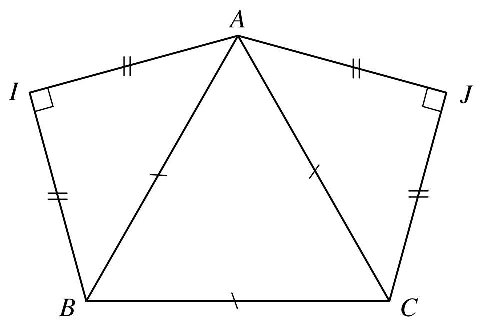
1) a) Calculer $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ})$.

b) En déduire $(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IA})$.

2) Calculer $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{BC})$.

3) a) Déterminer $(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{BC})$.

c) Conclure.



Produit scalaire

Exercice 56

ABC est un triangle équilatéral de côté 5 cm. I est le milieu de $[BC]$. Calculer les produits scalaires suivants :

a) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ $\qquad$ b) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CI}$ $\qquad$ c) $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AI}$

Exercice 57

ABC est un triangle dans lequel $AB = 2$ et $AC = 3$; de plus $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4$.
Ce triangle est-il rectangle ? Si oui, préciser en quel sommet.

Exercice 58

$MNPQ$ est un carré de côté 6. I est le centre de ce carré. Calculer les produits scalaires suivants :

a) $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{QP}$ $\qquad$ b) $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PN}$ $\qquad$ c) $\overrightarrow{IN}.\overrightarrow{IP}$ $\qquad$ d) $\overrightarrow{QI}.\overrightarrow{NI}$

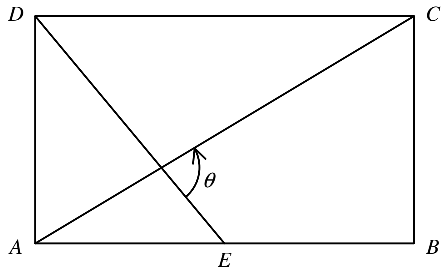
Exercice 59

$ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = 4$, $AD = 5$ et $AC = 7$. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ et en déduire BD.

Exercice 60

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 5$ et $AD = 3$.
E est le milieu de $[AB]$

1) Calculer les longueurs AC et DE.
2) En exprimant chacun des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DE}$.
3) En déduire la valeur de l'angle $\theta = \left(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{AC}\right)$ (on donnera une réponse en degrés arrondie au centième).



Exercice 61

(C) est un cercle de centre O et de rayon R, et A est un point fixé du plan.
Le but de l'exercice est de prouver que quelle que soit la droite (d) passant par A, coupant le cercle (C) en deux points P et Q, le produit scalaire $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AQ}$ est constant.

1) Soit P' le point de (C) diamétralement opposé à P. Montrer que $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AP'}$.
2) Démontrer que $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AP'} = AO^2 - R^2$.
3) Conclure.

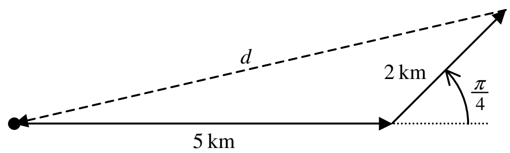
Exercice 62

ABC est un triangle dans lequel $AB = 7$, $AC = 4$ et $\hat{A} = \frac{\pi}{3}$.

1) Calculer la valeur exacte de BC.
2) Calculer la valeur exacte de $\sin \hat{B}$.

Exercice 63

Un promeneur marche 5 km en direction de l'est, puis 2 km en direction du nord-est. Surpris par le mauvais temps, il retourne directement à son point de départ en courant.
Sur quelle distance d a-t-il couru ? On donnera la valeur exacte puis la valeur approchée arrondie au mètre.



Exercice 64

Démontrer que ABC est un triangle rectangle en A $\Leftrightarrow$ $\sin^2 \hat{A} = \sin^2 \hat{B} + \sin^2 \hat{C}$.

Exercice 65

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 4876 \\ -4898873 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 317019173 \\ 315539 \end{pmatrix}$ sont-ils orthogonaux ?

Géométrie analytique

Exercice 66

Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(-1 ; 2)$, $B(3 ; 1)$ et $C(2 ; 4)$.

1) Déterminer une équation de la médiatrice (m) du segment $[AB]$.
2) Déterminer une équation de la hauteur (h) issue de A dans le triangle ABC.
3) Déterminer une équation du cercle Γ de diamètre $[AC]$.

Exercice 67

Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le point $A(3 ; 5)$.
Déterminer une équation de la tangente en A au cercle de centre O passant par A.

Exercice 68

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$. Déterminer si les équations suivantes sont des équations de cercle et, le cas échéant, préciser le centre et le rayon du cercle :

a) $x^2+y^2-2x-6y+5=0$ b) $x^2+y^2-x-3y+3=0$ c) $x^2+y^2-x+8y+10=0$

Exercice 69

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$, on considère le point $\Omega(2\,;-3)$.

1) Déterminer l'équation cartésienne du cercle (C) de centre Ω et de rayon 5.

2) a) Vérifier que le point $A(-2\,;0)$ appartient à (C).

b) Déterminer une équation cartésienne de la tangente (t) à (C) au point A.

Exercice 70

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$, déterminer une équation du cercle (C) de centre $A(1\,;2)$ et de rayon 3, puis déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec les axes de coordonnées.

Exercice 71

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$. Déterminer l'équation cartésienne du cercle (C) passant par les points $A(2\,;1)$ et $B(1\,;3)$, et dont le centre Ω se trouve sur la droite (δ) d'équation $x+y+1=0$.

Exercice 72

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$, on considère les points $A(-2\,;2)$, $B(2\,;2)$ et le milieu I de $[AB]$.

1) Démontrer que l'ensemble (E) des points M du plan tels que $MA^2+MB^2=40$ est le cercle (C) de centre I et de rayon 4 (on pourra utiliser la formule de la médiane).

2) Déterminer une équation du cercle (C).

3) Déterminer l'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.

4) a) Déterminer la valeur du réel négatif λ telle que le point $K(\sqrt{7}\,;\lambda)$ soit sur (C).

b) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en K.

Exercice 73

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$, on considère les cercles (C_1) et (C_2) d'équations respectives :

$x^2+y^2-4x+6y+3=0$ et $x^2+y^2+2x-6y-15=0$.

1) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C_1) et (C_2).

2) Soit (D) la droite d'équation $3x+y-13=0$. Déterminer l'intersection de (D) avec (C_1) puis avec (C_2).

Probabilités

Exercice 74

Dans un univers Ω, on considère deux événements incompatibles A et B tels que $p(A)=0{,}2$ et $p(B)=0{,}7$.

Déterminer $p(A\cap B)$, $p(A\cup B)$, $p(\overline{A})$ et $p(\overline{B})$.

Exercice 75

On lance un dé icosaèdrique non truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 20.

1) Calculer la probabilité des événements suivants :

A = « le numéro obtenu est un multiple de 2 »

B = « le numéro obtenu est un multiple de 4 »

C = « le numéro obtenu est un multiple de 7 »

D = « le numéro obtenu est un nombre premier »

E = « le numéro obtenu est un multiple de 2 mais pas de 4 »

2) Calculer $p(A\cap B)$, $p(A\cup B)$, $p(A\cap C)$, $p(A\cup C)$, $p(A\cap D)$, $p(A\cup D)$,

Exercice 76
Un dé à 6 faces est truqué de la façon suivante : chaque chiffre pair a deux fois plus de chance de sortir qu'un numéro impair.
1) Calculer la probabilité d'obtenir un 6.
2) On lance deux fois le dé.
   a) Calculer la probabilité d'obtenir deux fois un chiffre pair.
   b) Calculer la probabilité d'obtenir deux fois 6.

Exercice 77
1) Une urne U contient 3 boules blanches et une urne V contient deux boules blanches et une boule noire.
   On choisit une urne au hasard puis on tire une boule dans l'urne choisie.
   Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ?
2) L'urne U contient à présent une boule blanche et une boule noire, et l'urne V contient deux boules blanches et une boule noire. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ?

Exercice 78
On considère l'équation $x^2 + px + q = 0$, où les coefficients p et q sont obtenus en lançant un dé cubique ordinaire. Quelle est la probabilité que cette équation admette au moins une solution réelle ?

Exercice 79
La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

x	1	2	3	4	5	6
$p(X=x)$	0,15	0,2	0,25		0,15	0,05

1) Calculer $p(X=4)$ puis $p(X \leq 4)$.
2) Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 80
Une usine produit un certain type de pièces d'horlogerie. À l'issue du processus de fabrication, une pièce peut présenter 0, 1, 2 ou 3 défauts d'aspect.
1) Soit X la variable aléatoire qui à une pièce tirée au hasard dans la production d'une journée, associe le nombre de ses défauts. La loi de probabilité de X est la suivante :

x	0	1	2	3
$p(X=x)$	0,92	0,06	0,016	0,004

   a) Calculer l'espérance mathématique de X. Que représente-t-elle ?
   b) Calculer la variance et l'écart-type de X.
2) Le coût de production d'une pièce est de 24 €, et son prix de vente dépend du nombre de défauts qu'elle présente, comme l'indique le tableau suivant :

nombre de défaut(s)	0	1	2	3
prix de vente (en €)	30	20	15	5

   On note Y la variable aléatoire qui à chaque pièce tirée au hasard dans la production d'une journée associe le bénéfice qu'elle permet à l'entreprise de réaliser.
   a) Déterminer la loi de probabilité de Y.
   b) Calculer l'espérance mathématique $E(Y)$ de Y. Que représente $E(Y)$?

Exercice 81
On considère deux dés cubiques non-truqués identiques, dont les faces sont numérotées 0, 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$.
On lance simultanément les deux dés, et on lit les résultats α et β de leurs faces supérieures.
Soit X la variable aléatoire qui à chaque lancer des deux dés, associe la valeur $\sin(\alpha+\beta)$.
1) a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
   b) Déterminer la loi de probabilité de X.
2) a) Calculer la valeur exacte de l'espérance mathématique de X.
   b) Calculer la valeur exacte de la variance de X.

Exercice 82

On lance deux dés cubiques non-truqués dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

1) X désigne la variable aléatoire égale au plus grand des deux numéros sortis.

a) Représenter cette situation à l'aide d'un tableau ou d'un arbre.

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X (on donnera des valeurs approchées arrondies au centième).

2) Avant de lancer les dés, un joueur doit miser 2 €. Si le plus grand numéro sorti est impair, il gagne 4 € et rien sinon. On note G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

a) Établir la loi de probabilité de G.

b) Calculer l'espérance mathématique de G.
Que représente-t-elle concrètement ? Que peut-on dire de ce jeu ?

c) Quelle est la somme x que devrait gagner le joueur (au lieu de 4 €) lorsque le plus grand numéro est impair pour que le jeu soit équitable ?

Exercice 83

Une urne contient six boules rouges et n boules blanches, indiscernables au toucher. Un jeu consiste à tirer successivement et sans remise, deux boules de l'urne. Si les deux boules sont de la même couleur, le joueur gagne un euro ; si elles sont de couleurs différentes, le joueur perd un euro.

1) Dans cette question, on suppose $n=3$.

a) Calculer la probabilité d'obtenir deux boules de même couleur.

b) Calculer la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes.

2) Dans cette question, l'entier naturel n est quelconque, supérieur ou égal à 2.
On note X la variable aléatoire qui à chaque partie associe le gain algébrique du joueur.

a) Exprimer en fonction de n les probabilités des événements $X=1$ et $X=-1$.

b) Prouver que l'espérance mathématique de X est $E(X)=\dfrac{n^2-13n+30}{(n+6)(n+5)}$.

c) Pour quelles valeurs de n le jeu est-il équitable ?

d) Pour quelles valeurs de n est-il favorable au joueur ?

Exercice 84

Un sac contient trois jetons rouges numérotés de 1 à 3, quatre jetons verts de 1 à 4, et un jeton noir numéroté 1. Dans chacun des cas suivants, indiquer si un schéma Bernoulli est défini et le cas échéant, préciser ses paramètres.

a) On tire trois jetons avec remise et on compte les jetons rouges.

b) On tire simultanément cinq jetons et on compte les jetons numérotés 1.

c) On tire des jetons avec remise et on compte le nombre de tirages nécessaire pour obtenir le jeton noir.

d) On tire successivement et sans remise trois jetons et on compte les jetons verts.

e) On tire douze jetons avec remise et on compte les jetons noirs.

Exercice 85

À la fête foraine, un jeu consiste à faire tourner une roue pour gagner un cadeau. La roue est partagée en seize secteurs identiques dont cinq seulement permettent de gagner. Dix joueurs participent successivement à ce jeu.

1) Quelle est la probabilité que cinq d'entre eux exactement gagnent ?

2) Quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux perde ?

Exercice 86

Un couple souhaite avoir des enfants ; d'après leurs antécédents familiaux, ils ont 30 % de chances d'avoir des jumeaux. Ce couple mène à terme trois grossesses.

1) On note X la variable aléatoire égale au nombre de paires de jumeaux de la famille.

a) Justifier que X suit une loi binômiale et préciser ses paramètres.

b) Déterminer la probabilité pour ce couple d'avoir au moins deux paires de jumeau.

2) On note Y la variable aléatoire égale au nombre d'enfants de ce couple.

a) Déterminer la loi de probabilité de Y.

b) Calculer son espérance mathématique et interpréter le résultat.

Exercice 87

On considère un dé usuel non-truqué. A-t-on plus de chances :

- d'obtenir six en le lançant une fois,
- d'obtenir au moins 2 six en le lançant 4 fois,
- d'obtenir au moins 4 six en le lançant 8 fois ?

Exercice 88

Une compagnie aérienne dispose d'avion bimoteurs et quadrimoteurs. Tous sont équipés des mêmes moteurs, qui ont une probabilité p de tomber en panne (les pannes de moteur sont indépendantes entre elles).
Un avion peut continuer de voler tant que la moitié au moins de ses moteurs fonctionne.
Discuter, en fonction de la valeur de p, du type d'avion le plus sûr.

Statistiques

Exercice 89

Huit sprinters effectuent deux 100 m. Leurs temps sont donnés dans le tableau suivant :

	sprinter A	sprinter B	sprinter C	sprinter D	sprinter E	sprinter F	sprinter G	sprinter H
1^er^ sprint	10"14	10"17	9"94	10"05	10"25	10"09	9"98	10"32
2^ème^ sprint	10"41	9"97	9"96	10"12	10"19	10"24	10"12	10"17

On note $x_1, x_2, ..., x_8$ les temps respectifs des sprinters au premier sprint et $y_1, y_2, ..., y_8$ leurs temps respectifs au second sprint.
1) Calculer les moyennes x et y des séries (x_i) et (y_i).
2) Calculer les écarts-types σ_x et σ_y des séries (x_i) et (y_i).
3) Lequel des deux sprints a été le plus rapide ? Le plus homogène ?

Exercice 90

Le tableau suivant donne les résultats obtenus au bac blanc par une classe en maths et en physique :

note	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
maths	0	0	0	1	0	1	1	3	4	4	1	3	2	2	1	1	0	0	0	0
physique	1	0	0	2	0	1	2	1	1	4	2	2	0	3	2	1	0	1	0	1

Le but de l'exercice est de comparer la dispersion des notes en maths et en Physique.
1) Utilisation des quartiles
   a) Calculer la médiane Me et les quartiles Q_1 et Q_3 en maths.
   b) Calculer la médiane Me' et les quartiles Q'_1 et Q'_3 en physique.
   c) Représenter les diagrammes en boîte des notes de maths et des notes de physique. Interpréter.
2) Utilisation des écarts-types
   a) Calculer la moyenne m des notes de maths et la moyenne m' des notes de physique. Interpréter.
   b) Calculer l'écart-type σ des notes de maths et l'écart-type σ' des notes de physique. Interpréter.

Exercice 91

On considère la série statistique suivante (qui comporte k valeurs) dont on note m la moyenne et V la variance :

valeur	x_1	x_2	...	x_k
effectif	n_1	n_2	...	n_k

On note $N = n_1 + n_2 + ... + n_k$ (effectif total) et pour tout $i \in \{ 1 ; 2 ; ... ; k \}$, on pose $f_i = \dfrac{n_i}{N}$ (fréquence de x_i).

La fonction φ est définie sur **R** par $\varphi(t) = f_1(x_1 - t)^2 + f_2(x_2 - t)^2 + ... + f_k(x_k - t)^2$.
1) Calculer la dérivée de φ et étudier ses variations.
2) En déduire que φ admet un minimum en $t = m$. Que vaut ce minimum ?