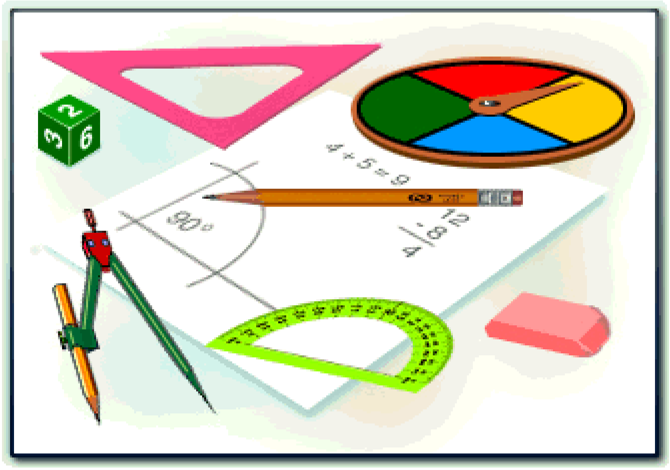


MATHEMATIQUES

CAHIER DE REVISIONS ETE 2018

ENTREE EN PREMIERE

CORRECTIONS

Exercice 1

Partie A :

capacité vitale (en L)	4,2	4,5	4,6	4,7	4,9	5,0	5,2	5,6	total
effectif	43	7	20	51	69	12	18	20	240
fréquence (à 0,01 près)	0,18	0,03	0,08	0,21	0,29	0,05	0,08	0,08	
fréquences cumulées croissantes	0,18	0,21	0,29	0,5	0,79	0,84	0,92	1	

Partie B :

1) Le caractère étudié est la capacité vitale.

2) $0{,}84 \times 100 = 84\,\%$

3) $m \approx 4{,}78$ (à la calculatrice)

4) $Me = 4{,}7$ (colonne où les FCC atteignent 0,5)
$Q_1 = 4{,}6$ (colonne où les FCC atteignent 0,25)
$Q_3 = 4{,}9$ (colonne où les FCC atteignent 0,75)

Exercice 2

1)

	cinéma multiplexe	cinéma de quartier	TOTAL
films français	2 100	2 100	4 200
films étrangers	8 400	1 400	9 800
TOTAL	10 500	3 500	14 000

2) $p(F) = \frac{4200}{14000} = 0{,}3$

3) $M \cap F$: « le spectateur préfère voir des films français au cinéma multiplexe » ; $p(M \cap F) = \frac{2100}{14000} = 0{,}15$

4) $p(M) = \frac{10500}{14000} = 0{,}75$ donc $p(M \cup F) = p(M) + p(F) - p(M \cap F) = 0{,}75 + 0{,}3 - 0{,}15 = 0{,}9$
<u>ou</u> $p(M \cup F) = \frac{2100+8400+2100}{14000} = \frac{12600}{14000} = 0{,}9$

5) L'univers est ici constitué des 9 800 spectateurs préférant les films étrangers : $p = \frac{1400}{9800} \approx 0{,}14$

Exercice 3

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0-(-3) \\ 6-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 4-1 \\ 0-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ d'où le résultat

2) a) $AB^2 = 3^2 + 2^2 = 13$; $AC^2 = [4-(-3)]^2 + (0-4)^2 = 49 + 16 = 65$; $BC^2 = (4-0)^2 + (0-6)^2 = 16 + 36 = 52$
$AB^2 + BC^2 = 65 = AC^2$ donc d'après la réciproque de Pythagore, ABC est rectangle en B
b) $ABCD$ est un rectangle (parallélogramme avec un angle droit)

3) a) C et D n'ont pas même abscisse donc (CD) a une équation de la forme $y = mx + p$ avec $m = \frac{-2-0}{1-4} = \frac{2}{3}$
et $C(4;0) \in (CD) \Leftrightarrow 0 = \frac{2}{3} \times 4 + p \Leftrightarrow p = -\frac{8}{3}$, d'où $(CD) : y = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$
b) L'ordonnée à l'origine de (CD) est $p = -\frac{8}{3}$ donc $E\left(0;-\frac{8}{3}\right)$

Exercice 4

1) a) On enlève deux fois la longueur x dm à chaque côté de 6 dm ; il faut donc que $0 \le 2x \le 6 \Leftrightarrow 0 \le x \le 3$
b) $h = x$ et $c = 6 - 2x$
c) $V(x) = hc^2 = x(6-2x)^2 = x(36 - 24x + 4x^2) = 36x - 24x^2 + 4x^3$

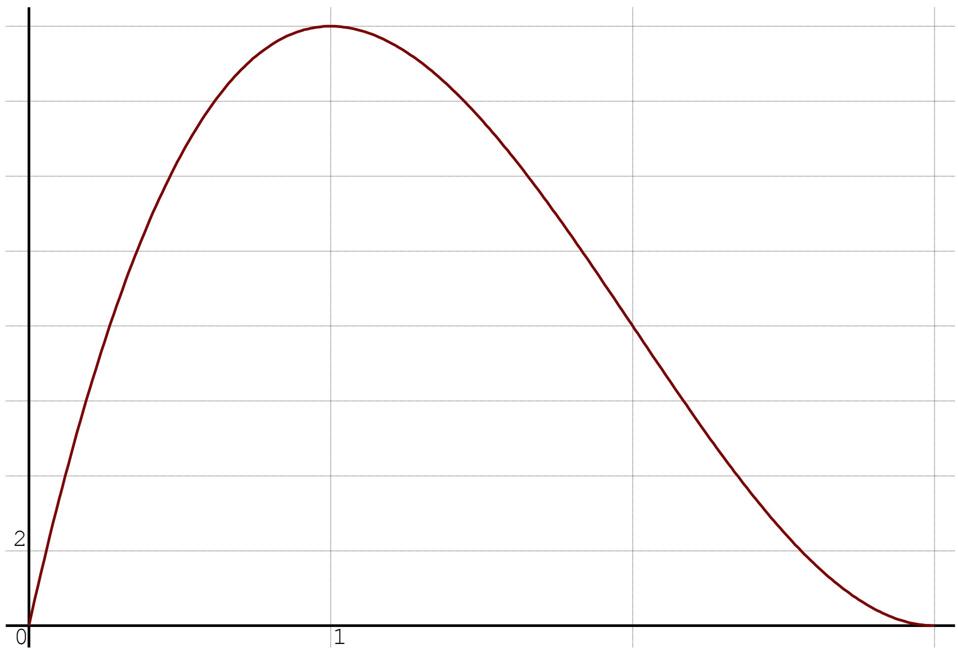
2) $V(1{,}5) = 4 \times 1{,}5^3 - 24 \times 1{,}5^2 + 36 \times 1{,}5 = 13{,}5$
Lorsqu'on découpe quatre carrés de côté 1,5 dm, on obtient une boîte de contenance 13,5 dm^3

3) La boîte est cubique lorsque $h = c \Leftrightarrow x = 6 - 2x \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$; le volume est alors $2^3 = 8\ dm^3$

4)

x	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5	2,75	3
$V(x)$	0	7,56	12,5	15,19	16	15,31	13,5	10,94	8	5,06	2,5	0,69	0

5)



6) Le volume maximal semble être $16\,\text{dm}^3$, atteint pour $x=1\,\text{dm}$

7) $4(x-1)^2(x-4)=(4x-16)(x^2-2x+1)=4x^3-8x^2+4x-16x^2+32x-16=\underbrace{4x^3-24x^2+36x-16}_{V(x)}$

8) Un carré est positif donc $(x-1)^2\geq 0$, et si $x\leq 3$ alors $x-4\leq -1<0$ donc $V(x)-16=4(x-1)^2(x-4)\leq 0$
Alors $V(x)\leq 16$ pour tout $x\in[0;3]$, mais il reste, pour prouver que 16 est le maximum de V, à vérifier qu'il est atteint (ce qui est le cas puisque $V(1)=4\times 1^3-24\times 1^2+36\times 1=16$)

Exercice 5

1) $I=[0;3]$

2) $(MN)//(AC)$ donc d'après Thalès : $\dfrac{BM}{BA}=\dfrac{MN}{AC}\Leftrightarrow\dfrac{3-x}{3}=\dfrac{MN}{3}\Leftrightarrow MN=3-x$

alors $A(x)=AM\times MN=x(3-x)=3x-x^2$ d'où $-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}=-(x^2-3x+\frac{9}{4})-\frac{9}{4}=-x^2+3x-\frac{9}{4}+\frac{9}{4}=A(x)$

3) $A(x)$ est de la forme $a(x-\alpha)^2+\beta$
avec $a=-1<0$, $\alpha=\frac{3}{2}$ et $\beta=\frac{9}{4}$, d'où :

x	0	$\frac{3}{2}$	3
V	0 ↗	$\frac{9}{4}$	↘ 0

4) L'aire maximale est $2{,}25\,\text{m}^2$, atteinte pour $x=1{,}5\,\text{m}$ (lorsque M est au milieu de $[AB]$)

5) a) $A(x)=2\Leftrightarrow -\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}=2\Leftrightarrow \frac{9}{4}-2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\Leftrightarrow\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

b) $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow(x-1)(x-3)=0$ donc $S=\{1;3\}$
L'aire du logo est $2\,\text{m}^2$ lorsque M est situé au tiers ou au deux-tiers de $[AB]$

Exercice 6

Partie A

1) Les antécédents de 0 par f sont -2 et 4, et l'inéquation $f(x)<0$ a pour solution $S=[-2;4]$

2) Voir page suivante

3) C et D semblent se couper aux points $A(-2;0)$ et $B(2;-4)$

4) $S=]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[$

Partie B

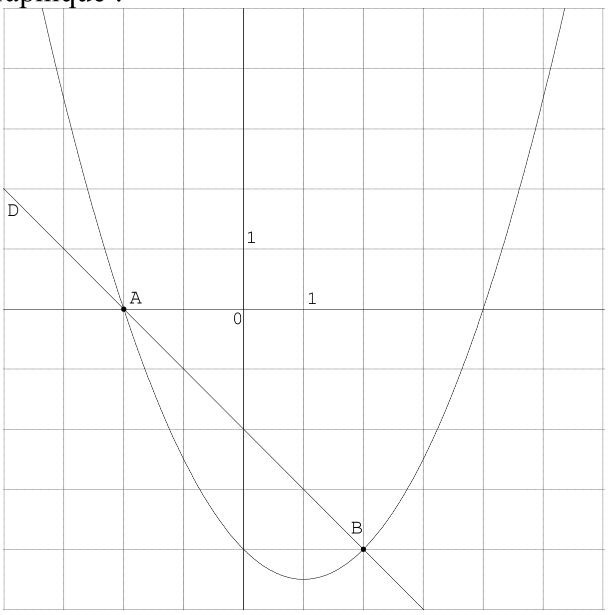
1) $f(x)-(-x-2)=\frac{1}{2}x^2-x-4+x+2=\frac{1}{2}x^2-2=\frac{1}{2}(x^2-4)=\frac{1}{2}(x-2)(x+2)$

2) C et D se coupent aux points d'abscisse x vérifiant $f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)-(-x-2)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)=0$
c'est-à-dire $x=2$ ou $x=-2$; de plus $g(2)=2-2=0$ d'où $A(-2\,;0)$, et $g(-2)=-2-2=-4$ d'où $B(2\,;-4)$
$f(x)\geq g(x) \Leftrightarrow f(x)-(-x-2)\geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)\geq 0$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-2)(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

donc $S=]-\infty\,;-2]\cup[2\,;+\infty[$

Graphique :



Exercice 7

1) $D_f=[-5\,;7]$

2)

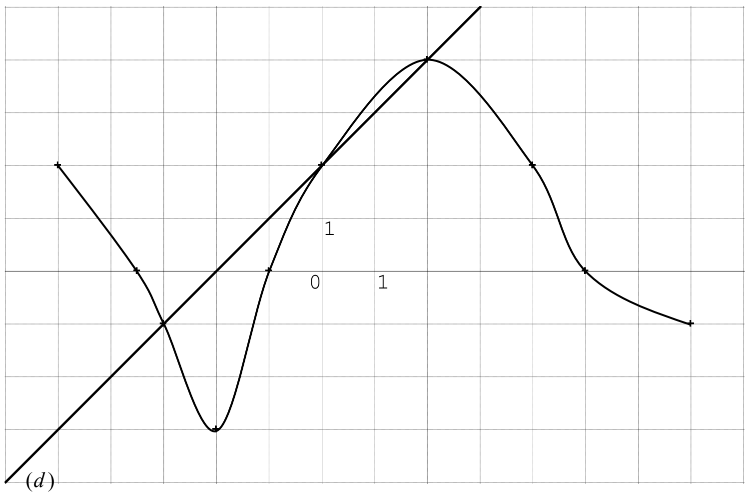
x	-5		-2		2		7
f	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	4	$\searrow$	-1

3) $S=\{-5\,;0\,;4\}$

4) $S=\{-3{,}5\,;-1\,;5\}$

5) $S=[-5\,;0]\cup[4\,;7]$ (abscisses des points de la courbe situés en-dessous (ou sur) la droite d'équation $y=2$)

6) a)



b) $S=[-5\,;-3]\cup[0\,;2]$ (abscisses des points de la courbe situés au-dessus (ou sur) la droite (d))

Exercice 8

1) $p(F)=\frac{720}{1200}=0{,}6$ $\quad p(T)=\frac{618}{1200}=0{,}515$ $\quad p(\overline{T})=1-p(T)=0{,}485$

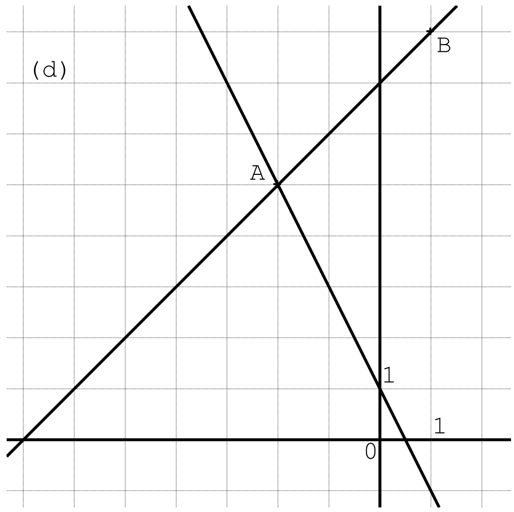
2) $T\cup A=$ « l'employé préfère le train ou l'avion » et $p(T\cup A)=\frac{618+462}{1200}=0{,}9$

3) $F\cap T=$ « l'employé(e) choisi(e) est une femme qui préfère le train » et $p(F\cap T)=\frac{468}{1200}=0{,}39$

$p(F\cup T)=p(F)+p(T)-p(F\cap T)=0{,}6+0{,}515-0{,}39=0{,}725$

4) L'univers est ici constitué des $462+120=582$ employés ne préférant pas le train : $p=\frac{196+56}{582}=\frac{252}{582}\approx 0{,}433$

Exercice 9



1) a) (d) a pour coefficient directeur -2 donc elle a une équation de la forme $y=-2x+p$; elle passe par le point $A(-2;5)$ donc $5=-2\times(-2)+p \Leftrightarrow 1=p$, d'où $(d): y=-2x+1$

b) A et B n'ont pas même abscisse donc (AB) a une équation de la forme $y=mx+p$ avec $m=\frac{8-5}{1-(-2)}=1$

et $B(1;8)\in(AB) \Leftrightarrow 8=1\times 1+p \Leftrightarrow p=7$, d'où $(AB): y=x+7$

2)

x	$-\infty$		-7		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$-2x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+7$		$-$	0	$+$		$+$	
$(-2x+1)(x+7)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

donc $S=]-\infty;-7]\cup[\frac{1}{2};+\infty[$

Exercice 10

1) $m=175$ $\quad Q_1=140$ $\quad Me=160$ $\quad Q_3=240$

2) C'est $Q_1=140$ (l'enneigement a été favorable pendant les trois-quarts de la saison)

3) C'est exact : $Q_3=240$ (l'enneigement a été supérieur ou égal à 2,4 m pendant le quart de la saison)

Exercice 11

1)

2° \ 1°	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	*11*	21	31	41	51
2	12	*22*	32	42	52
3	13	23	*33*	43	53
4	14	24	34	*44*	54
5	15	25	35	45	*55*

Il y a en tout 25 issues possibles

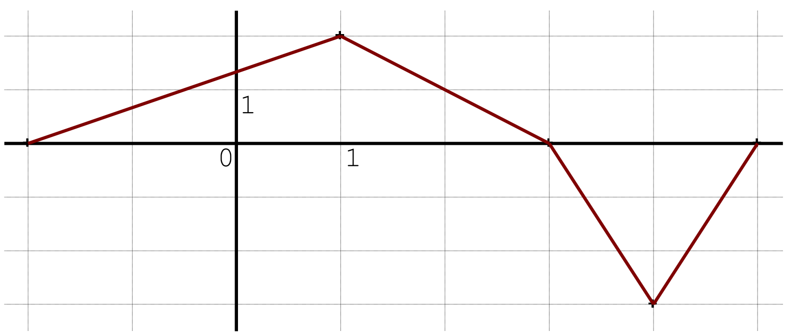
2) $p_{\text{double}}=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}=0{,}2$ (en italique)

3) $p_3=\frac{9}{25}=0{,}36$ (souligné) et $p_9=\frac{2}{25}=0{,}08$ (souligné double)

4) $p_5=\frac{5}{25}=0{,}2$ (dernière ligne du tableau)

5) $p_{3\text{ ou }5}=\frac{12}{25}=0{,}48$ (en gris)

Exercice 12



Exercice 13

1) a) On ne peut pas conclure
   b) On ne peut pas conclure
   c) Vrai
   d) Faux
   e) On ne peut pas conclure
   f) Faux
   g) Vrai
   h) Vrai (quoique…)
   i) Faux (quoique…)
   j) Vrai
   k) Faux
   l) Vrai

2) a) $0 \leq f(x) \leq 2$ b) $0 \leq f(x) \leq 4$ c) $-2 \leq f(x) \leq 4$

Exercice 14

1) –2,6 et π sont tous deux compris entre –3 et 5, donc $f(-2{,}6)$ et $f(\pi)$ sont positifs
2) $S = \{-3\,;5\}$
3) $S =]-\infty\,;-3[\, \cup\,]5\,;+\infty[$

Exercice 15

1) Si $x \leq -7$ alors $x^2 \in [49\,;+\infty[$
2) Si $x \geq 5\sqrt{2}$ alors $x^2 \in [50\,;+\infty[$
3) Si $-1 \leq x \leq 2$ alors $x^2 \in [0\,;4]$
4) Si $x^2 \leq 2$ alors $x \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$
5) Si $x \leq -7$ alors $\frac{1}{x} \in [-\frac{1}{7}\,;0[$
6) Si $x \geq 3$ alors $\frac{1}{x} \in]0\,;\frac{1}{3}]$
7) Si $-2 < x < 0$ alors $\frac{1}{x} \in]-\infty\,;-\frac{1}{2}[$
8) Si $\frac{1}{x} < 3$ alors $x \in]-\infty\,;0[\, \cup\,]\frac{1}{3}\,;+\infty[$

Exercice 16

1) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{4\}$
2)

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		4		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+4$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

3) $S = [\frac{1}{2}\,;4[$

Exercice 17

1) $(x+1)^2 - 2 = x^2 + 2x + 1 - 2 = x^2 + 2x - 1 = g(x)$ pour tout réel x
2) $g(x)$ est de la forme $a(x-\alpha)^2 + \beta$
   avec $a = 1 > 0$, $\alpha = -1$ et $\beta = -2$, d'où :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
V		$\searrow$	-2	$\nearrow$	

3) $g(x) = (x+1)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(x+1-\sqrt{2}\right)\left(x+1+\sqrt{2}\right)$
4) a) $g(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 - \sqrt{2} = 0$ ou $x + 1 + \sqrt{2} = 0$ d'où $S = \{-1+\sqrt{2}\,;-1-\sqrt{2}\}$
   b)

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$x+1-\sqrt{2}$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1+\sqrt{2}$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]-1+\sqrt{2}\,;-1-\sqrt{2}\,[$

Exercice 18

Le coût pour x kilomètres est $f(x) = 460 + 3{,}5x$ avec le premier transporteur, et $g(x) = 1000 + 2x$ avec le second ; ce dernier est meilleur marché lorsque $g(x) \leq f(x) \Leftrightarrow 1000 - 460 \leq 3{,}5x - 2x \Leftrightarrow 1{,}5x \geq 540 \Leftrightarrow x \geq 360\,\text{km}$

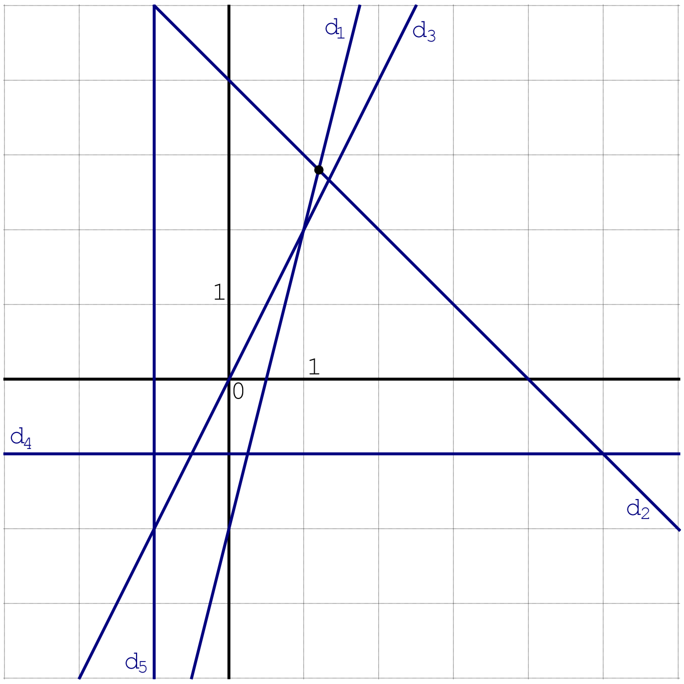
Exercice 19

1) $d : y = \frac{3}{4}x + 3$ et $d' : y = -\frac{1}{3}x + 1$

2) $\begin{cases} y = \frac{3}{4}x + 3 \\ y = -\frac{1}{3}x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}x + 3 = -\frac{1}{3}x + 1 \\ y = \frac{3}{4}x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\right)x = -2 \\ y = \frac{3}{4}x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{13}{12}x = -2 \\ y = \frac{3}{4}x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{24}{13} \\ y = -\frac{3}{4} \times \frac{24}{13} + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{24}{13} \\ y = \frac{21}{13} \end{cases}$

Exercice 20

1)



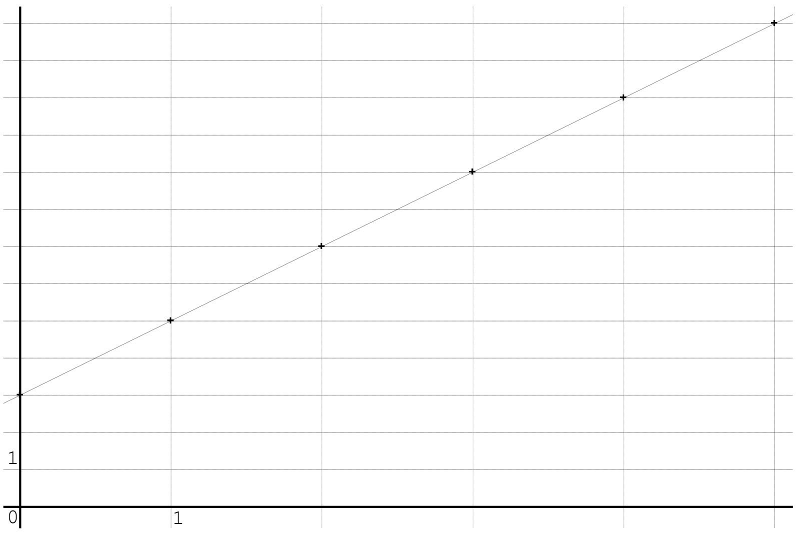
2) $\begin{cases} y = 4x - 2 \\ y = 4 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2 = 4 - x \\ y = 4 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 6 \\ y = 4 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = 4 - \frac{6}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = \frac{14}{5} \end{cases}$

Exercice 21

1)

n	0	1	2	3	4	5
B	3	5	7	9	11	13

2)



On remarque que les points sont alignés, sur la droite d'équation $y = 2x + 3$

3) $f(n) = 2n + 3$

Exercice 22

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-2\\2-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}1-(-5)\\0-(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CD}=-2\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires

2) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-(-2)\\3-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}\frac{45}{2}-(-2)\\11-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{49}{2}\\10\end{pmatrix}$; $5\times 10=50$ et $2\times\frac{49}{2}=49$

$50\neq 49$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ ne sont pas colinéaires et donc A, B et M ne sont pas alignés

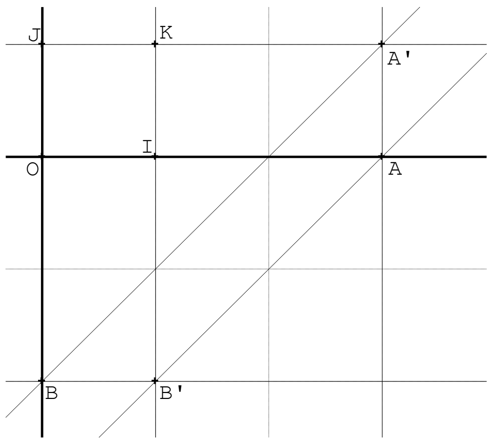
3) Si $G(x;y)$ alors $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}x-(-3)\\y-(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+3\\y+2\end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{KB}\begin{pmatrix}-3-4\\-2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\-4\end{pmatrix}$ donc $\frac{1}{4}\overrightarrow{KB}\begin{pmatrix}-\frac{7}{4}\\-1\end{pmatrix}$

alors $\overrightarrow{BG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{KB}\Leftrightarrow\begin{cases}x+3=-\frac{7}{4}\\y+2=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{19}{4}\\y=-3\end{cases}$

4) $AB^2=[-1-(-4)]^2+(-3-2)^2=9+25=34$; $AC^2=[2-(-4)]^2+(-1-2)^2=36+9=45$;
$BC^2=[2-(-1)]^2+[-1-(-3)]^2=9+4=13$; si ABC était rectangle, ce serait en B et on aurait d'après Pythagore $AB^2+BC^2=AC^2$ ce qui n'est pas le cas car $AB^2+BC^2=47\neq 45$, donc ABC n'est pas rectangle

Exercice 23

1)



2) $K(1;1)$, $A'(3;1)$ et $B'(1;-2)$

3) $\overrightarrow{AB'}\begin{pmatrix}1-3\\-2-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'B}\begin{pmatrix}0-3\\-2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}$

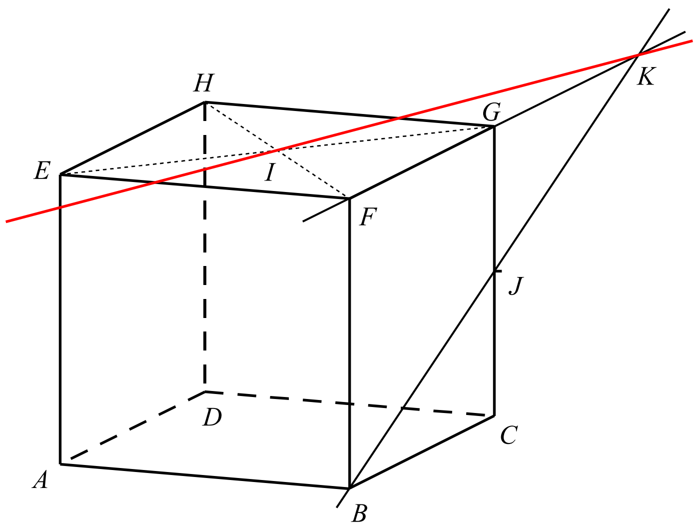
$\overrightarrow{A'B}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB'}$ donc $\overrightarrow{A'B}$ et $\overrightarrow{AB'}$ sont colinéaires et donc (AB') et $(A'B)$ sont parallèles

Exercice 24

1) 1. B (elles sont parallèles)
2. B
3. B
4. B (au point G)
5. B

2) (BJ) et (FG) sont coplanaires (dans la face $BCFG$) mais pas parallèles (ni bien sûr confondues) donc elles sont sécantes

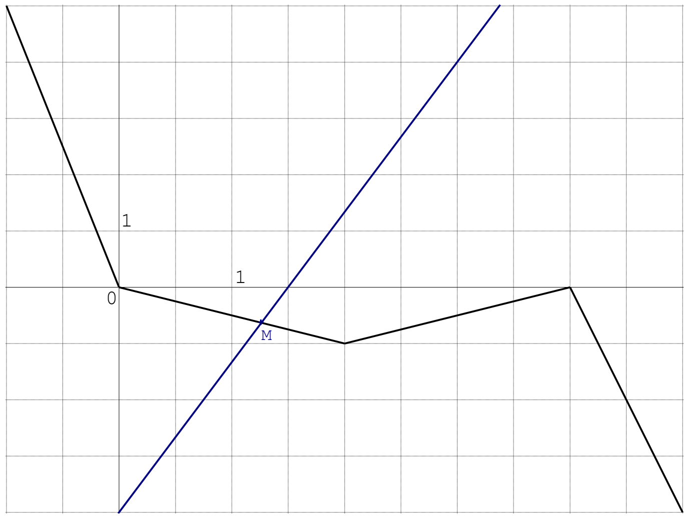
3) Les plans (EFG) et (BIJ) ne sont pas confondus ils ne sont pas parallèles car I leur est commun
de plus $K\in(BJ)$ donc $K\in(BIJ)$
et $K\in(FG)$ donc $K\in(EFG)$
donc K est également commun aux plans (EFG) et (BIJ) : leur intersection est donc la droite (IK)



Exercice 25

1)

x	-1		2		4		5
f	5	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4



2) $S =]0;4[\cup]4;5[$ (abscisses des points de (C_f) situés strictement en-dessous de l'axe des abscisses)

3) $f(2) = -1$

4) a) Voir graphique ci-contre

b) (C_f) et (C_g) semblent se couper en $M(1{,}3\,;-0{,}6)$

5) a) $f(x) = mx + p$ avec $m = \frac{-1-0}{2-0} = -\frac{1}{2}$ et $p = 0$

(la droite passe par l'origine) donc $f(x) = -\frac{1}{2}x$

b) $\begin{cases} y = \frac{8}{3}x - 3 \\ y = -\frac{1}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{8}{3}x - 4 = -\frac{1}{2}x \\ y = -\frac{1}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{8}{3} + \frac{1}{2}\right)x = 4 \\ y = -\frac{1}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{19}{6}x = 4 \\ y = -\frac{1}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{24}{19} \\ y = -\frac{1}{2} \times \frac{24}{19} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{24}{19} \\ y = -\frac{12}{19} \end{cases}$

6) a)

```
Saisir x
Si x ≤ 0 alors
   y prend la valeur −5 × x
Sinon
   Si x ≤ 2 alors
      y prend la valeur −x / 2
   Sinon
      Si x ≤ 2 alors
         y prend la valeur x / 2 − 2
      Sinon
         y prend la valeur −4 × x + 16
      Finsi
   Finsi
Finsi
Afficher y
```

b) Sur Casio Graph 35+ :

```
"x="?→X↵
If X≤0↵
Then -5X→Y↵
Else If X≤2↵
Then -X÷2→Y↵
Else If X≤4↵
Then X÷2–2→Y↵
Else -4X+16→Y↵
IfEnd↵
IfEnd↵
IfEnd↵
Y
```

Exercice 26

1) a) Avec la forme factorisée : $f(-3) = 0$

b) Avec la forme développée : $f(0) = 12$

c) Avec la forme canonique : $f(-\frac{7}{2}) = -\frac{1}{4}$.

d) Avec la forme développée : $f\left(\sqrt{7}\right) = 7 + 7\sqrt{7} + 12 = 19 + 7\sqrt{7}$

2) a) Avec la forme factorisée : $S = \{-3\,;-4\}$

b) Avec la forme développée : $f(x) = 12 \Leftrightarrow x^2 + 7x = 0 \Leftrightarrow x(x+7) = 0$ d'où $S = \{0\,;-7\}$

c) Avec la forme canonique : $f(x) = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 = 0$ d'où $S = \{-\frac{7}{2}\}$

3) Avec la forme canonique, $f(x)$ est de la forme $a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a = 1 > 0$, $\alpha = -\frac{7}{2}$ et $\beta = -\frac{1}{4}$, d'où :

x	$-\infty$		$-\frac{7}{2}$		$+\infty$
f		$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	

4) a) D'après 2a, ce sont les points de coordonnées $(-3\,;0)$ et $(-4\,;0)$

b) D'après 1b, c'est le point de coordonnées $(0\,;12)$

c) D'après 2b, ce sont les points de coordonnées $(0\,;12)$ et $(-7\,;12)$

d) D'après 1d, c'est le point de coordonnées $\left(\sqrt{7};19 + 7\sqrt{7}\right)$

5) Avec la forme factorisée :

x	$-\infty$		-4		-3		$+\infty$
$x+3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

donc $S =]-4\,;-3[$

Exercice 27

1) a)

x	$-\infty$		2		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
$3x-7$		$+$		$+$	0	$-$	
$x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

b) $S =]2\,;\frac{7}{3}]$

2) $3-\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{3(x-2)}{x-2}-\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{3x-6-1}{x-2}=\dfrac{3x-7}{x-2}=f(x)$, pour tout $x\in\mathbf{R}\setminus\{2\}$

3) $f\left(\sqrt{7}\right)=\dfrac{3\sqrt{7}-7}{\sqrt{7}-2}=\dfrac{(3\sqrt{7}-7)(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}=\dfrac{3\times 7+6\sqrt{7}-7\sqrt{7}-14}{7-4}=\dfrac{7-\sqrt{7}}{3}$

4) a) $f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{3x-7}{x-2}=0 \Leftrightarrow 3x-7=0$ (et $x\neq 2$) d'où $S=\{\frac{7}{3}\}$

b) $f(x)=3 \Leftrightarrow 3-\dfrac{1}{x-2}=3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x-2}=0 \Leftrightarrow 1=0$ (et $x\neq 2$) donc $S=\varnothing$

c) $f(x)=5 \Leftrightarrow \dfrac{3x-7}{x-2}-5=0 \Leftrightarrow \dfrac{3x-7-5(x-2)}{x-2}=0 \Leftrightarrow 3x-7-5x+10=0 \Leftrightarrow -2x+3=0$ d'où $S=\{\frac{3}{2}\}$

5) a) D'après 4a, c'est le point de coordonnées $(\frac{7}{3}\,;0)$

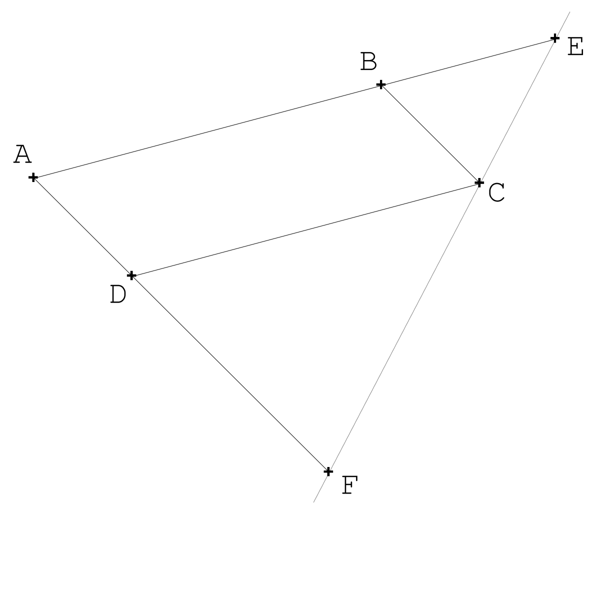
b) $f(0)=\dfrac{3\times 0-7}{0-2}=\frac{7}{2}$, c'est donc le point de coordonnées $(0\,;\frac{7}{2})$

c) D'après 4c, c'est le point de coordonnées $(\frac{3}{2}\,;5)$

d) D'après 3, c'est le point de coordonnées $\left(\sqrt{7}\,;\frac{7-\sqrt{7}}{3}\right)$

Exercice 28

1)



2) $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{DA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=-\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AD}$

$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AD}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AD}$

3) $-3\overrightarrow{CE}=-3\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{EF}$

donc les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires, et donc les points C, E et F sont alignés

Exercice 29

1) $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}5-(-1)\\1-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$ et si $D(x;y)$ alors $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}x-1\\y-4\end{pmatrix}$, et $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=6\\y-4=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=7\\y=6\end{cases}$

2) $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5-1\\1-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ et si $E(x;y)$ alors $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}x-5\\y-1\end{pmatrix}$, et E est symétrique de A par rapport à C si et seulement si $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CE}\Leftrightarrow\begin{cases}x-5=4\\y-1=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=9\\y=-2\end{cases}$

3) $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}7-(-1)\\6-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\7\end{pmatrix}$ et si $F(x;y)$ alors $\overrightarrow{FC}\begin{pmatrix}5-x\\1-y\end{pmatrix}$, et $[FD]$ et $[BC]$ ont même milieu si et seulement si $BDCF$ est un parallélogramme, c'est-à-dire si $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{FC}\Leftrightarrow\begin{cases}5-x=8\\1-y=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\\y=-6\end{cases}$

4) $x_J=\frac{9+(-3)}{2}=3$ et $y_J=\frac{-2+(-6)}{2}=-4$

5) $\overrightarrow{FB}\begin{pmatrix}-1-(-3)\\-1-(-6)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}1-(-1)\\4-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{BA}$, d'où le résultat

Exercice 30

1) $x=AM=AP$; $M\in[AB]$ donc $0\le x\le 10$ et $P\in[AD]$ donc $0\le x\le 8$ d'où finalement $x\in[0;8]$

2) L'aire de $MNRB$ est $MB\times MN=(10-x)x$ et celle de $DPNQ$ est $PN\times PD=x(8-x)$
l'aire coloriée est donc $f(x)=(10-x)x+x(8-x)=x(10-x+8-x)=x(18-2x)=2x(9-x)$

3) $-2\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{81}{2}=-2(x^2-9x+\frac{81}{4})+\frac{81}{2}=-2x^2+18x-\frac{81}{2}+\frac{81}{2}=2x(-x+9)=f(x)$ pour tout $x\in[0;8]$

$f(x)$ est de la forme $a(x-\alpha)^2+\beta$
avec $a=-2<0$, $\alpha=\frac{9}{2}$ et $\beta=\frac{81}{2}$, d'où :

x	0		$\frac{9}{2}$		8
V	0	$\nearrow$	$\frac{81}{2}$	$\searrow$	16

le maximum de f est donc $\frac{81}{2}$ (atteint pour $x=\frac{9}{2}$)

Exercice 31

1. C
2. A
3. A
4. C $\quad (x-5)^2-(3x+2)^2=0\Leftrightarrow[x-5-(3x+2)][x-5+3x+2]=0\Leftrightarrow(-2x-7)(4x-3)=0$
5. C $\quad (-x-3)^3(x+3)^3=[-(x+3)]^3(x+3)^3=-[(x+3)^3]^2$ et un carré est toujours positif
6. A

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$2-3x$		$+$		$+$	0	$-$	
$3+2x$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{2-3x}{3+2x}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

7. C

x	$-\infty$		$-\frac{3}{7}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$3+7x$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(3+7x)(2x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 32

1) On obtient 6 :

condition vérifiée ?		oui	oui	oui	oui	oui	oui	non
U	3	1,375	4,368	1,166	9,349	1,035	43,465	
N	0	1	2	3	4	5	6	

2) La boucle ne s'arrête jamais car U garde toujours la valeur 2 ($1+\frac{3}{2^2-1}=2$) : la condition $U<10$ reste vraie

3) Une erreur se produit dès la première itération car $1^2-1=0$: la division est impossible

Exercice 33

(ABJ) et (CGI) ne sont ni parallèles ni confondus, donc ils sont sécants selon une droite ;
$J\in(ABJ)$, et $I\in[AB]$ donc $I\in(ABJ)$; d'autre part, $I\in(CGI)$ et $J\in[CG]$ donc $J\in(CGI)$;
I et J sont tous deux communs à (ABJ) et (CGI) donc $(ABJ)\cap(CGI)=(IJ)$